....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

14. 03. 2023

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) In der Grenzschicht gilt : $Re \to \infty$, $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$.
Geeignete Referenzgrößen sind $u_{ref} = u_\infty, \quad \rho_{ref} = \rho_\infty, \quad x_{ref} = L$

Aus Massenerhaltung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{u_\infty}{L} \sim \frac{v_{ref}}{y_{ref}} \quad \Rightarrow \quad v_{ref} \sim \frac{u_\infty y_{ref}}{L} \sim \sqrt{\frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty}}$$

Aus Impulserhaltung

$$\Rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{L} \sim \eta \frac{u_\infty}{y_{ref}^2} \quad \Rightarrow \quad y_{ref} \sim \sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}}$$

b) Dimensionslose Größen:

$$\overline{v} = \frac{v}{v_{ref}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty}}}, \quad \overline{y} = \frac{y}{y_{ref}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}}},$$

$$\overline{x} = \frac{x}{L}, \quad \overline{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \overline{T} = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\Rightarrow \rho_\infty c_p \overline{\rho} \left(\frac{u_\infty T_\infty}{L} \overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \sqrt{\frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty}} \frac{T_\infty}{\sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}}} \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} \right) = \lambda T_\infty \left(\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\rho_\infty u_\infty}{\eta L} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \right) + \cdots$$

$$\cdots + \eta \left[2 \frac{u_\infty^2}{L^2} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} \right)^2 + 2 \frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty} \frac{\rho_\infty u_\infty}{\eta L} \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty}} \frac{1}{L} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \frac{u_\infty}{\sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} \right)^2 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots - \frac{2}{3} \left(\frac{u_\infty}{L} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\sqrt{\frac{\eta u_\infty}{L\rho_\infty}}}{\sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} \right)^2 \right]$$

c) Teilen der dimensionslosen Form durch z.B. $\frac{\rho_\infty c_p T_\infty u_\infty}{L}$ liefert

$$\overline{\rho u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{\rho v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p u_\infty L} \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\eta} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\eta u_\infty}{\rho_\infty L c_p T_\infty} \left[2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\eta}{\rho_\infty u_\infty L}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \sqrt{\frac{\rho_\infty u_\infty L}{\eta}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} \right)^2 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} \right)^2 \right]$$

Hiermit ergeben sich die Kennzahlen zu:

$$K_1 = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p u_\infty L}$$
$$K_2 = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\eta}$$
$$K_3 = \frac{\eta u_\infty}{\rho_\infty L c_p T_\infty}$$

d) Umformen in Kennzahlen der Strömungsmechanik:

$$K_1 = \frac{\lambda}{\rho_\infty c_p u_\infty L} = \frac{\lambda}{c_p \eta} \frac{\eta}{\rho_\infty u_\infty L} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_L}$$
$$K_2 = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\eta} = Re_L$$
$$K_3 = \frac{\eta u_\infty}{\rho_\infty L c_p T_\infty} = \frac{\eta}{\rho_\infty u_\infty L} \frac{u_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{1}{Re_L} \frac{u_\infty^2 (\gamma - 1)}{\gamma R T_\infty} = \frac{1}{Re_L} M_\infty^2 (\gamma - 1)$$

2. Aufgabe (13 Punkte)

a) Einführung dimensionsloser Größen

$$\overline{x} = \frac{x}{L}, \quad \overline{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = 1, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\eta_\infty} = 1$$
$$\overline{v} = \frac{v}{u_\infty}\frac{L}{h_1}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \quad \overline{y} = \frac{y}{h_1}\,.$$

Einsetzen in die y-Impulsgleichung liefert

$$\frac{\rho u_\infty^2 h_1}{L^2}\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right) = -\frac{\rho u_\infty^2}{h_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} + \frac{\eta u_\infty}{h_1 L}\left(\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2}\frac{h_1^2}{L^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2}\right) \quad \Bigg| : \frac{\rho u_\infty^2}{h_1}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{Re_L}\left[\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{h_1^2}{L^2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2} - Re_L\frac{h_1^2}{L^2}\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right)\right]$$

Aufgrund des Verhältnisses $h_1 \ll L$ folgt

$$\frac{h_1}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{h_1}{L}\right)^2 \ll 1, \quad \Rightarrow \quad Re_L\frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2}\,.$$

b) Ein Vergleich der rechten Seiten der Impulsgleichungen liefert

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} \ll \frac{1}{Re_L}\frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}\,.$$

Das heißt, dass die Durckänderung in y-Richtung vernachlässigbar gegenüber der Änderung in x-Richtung ist.

c) Vereinfachte x-Impulsgleichung in dimensionsbehafteter Form ist

$$\frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

Diese wird integriert in y-Richtung bevor Randbedingungen für die Bestimmung der unbekannten Integrationskonstanten verwendet werden

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

RB 1: $u(y=0) = u_\infty \quad \rightarrow \quad C_2 = u_\infty$

RB 2: $u(y=h(x)) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{h(x)}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2(x)}{2} + u_\infty\right)$

$$\Rightarrow u(x,y) = u_\infty\left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) - \frac{h^2(x)}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{y}{h(x)} - \frac{y^2}{h^2(x)}\right)\,.$$

Der Volumenstrom ergibt sich über die Integration der Geschwindigkeit in y-Richtung

$$\dot{V} = h(x)B \int_0^1 u(x,y) d\left(\frac{y}{h(x)}\right)$$

$$\dot{V} = h(x)B \left[u_\infty \left[\frac{y}{h(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2 \right]_0^1 + \frac{h^2(x)}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^3\right]_0^1 \right]$$

$$\dot{V} = \frac{u_\infty h(x) B}{2} - \frac{h^3(x)B}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

d) Umstellung des Ausdrucks für den Volumenstrom und anschließende Integration über x

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}}{h^3(x)B}$$

$$\int_{p_1}^{p} dp = \int_0^x \left(\frac{6\eta u_\infty}{h^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}}{h^3(x)B}\right) dx \quad \text{mit} \quad h(x) = h_1 e^{\frac{-x}{5L}}$$

$$p(x) = p_1 + \frac{6\eta u_\infty}{h_1^2}\int_0^x e^{\frac{2x}{5L}} dx - \frac{12\eta\dot{V}}{h_1^3 B}\int_0^x e^{\frac{3x}{5L}} dx$$

$$p(x) = p_1 + \frac{6\eta u_\infty}{h_1^2}\frac{5L}{2}\left[e^{\frac{2x}{5L}}\right]_0^x - \frac{12\eta\dot{V}}{h_1^3 B}\frac{5L}{3}\left[e^{\frac{3x}{5L}}\right]_0^x$$

$$p(x) = p_1 + \frac{15\eta u_\infty L}{h_1^2}\left[e^{\frac{2x}{5L}} - 1\right] - \frac{20\eta\dot{V}L}{h_1^3 B}\left[e^{\frac{3x}{5L}} - 1\right]$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

a) Mit $u_\infty = U_\infty \cos(\alpha)$, $v_\infty = U_\infty \sin(\alpha)$ sowie der Quellenergiebigkeit $E_Q > 0$ und Senkenergiebigkeit $E_S < 0$ folgt

$$F(z) = U_\infty \left[\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)\right] z + \frac{E_Q}{2\pi}\ln(z+L) + \frac{E_S}{2\pi}\ln(z-L)$$

b) Über die Definition der konjugiert komplexen Geschwindigkeit folgt

$$\overline{w} = u - \mathrm{i}v = \frac{dF}{dz} = U_\infty \left[\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)\right] + \frac{E_Q}{2\pi}\frac{1}{z+L} + \frac{E_S}{2\pi}\frac{1}{z-L}$$

Durch Erweiterung mittels des konjugiert komplexen Nenner

$$\frac{1}{z \pm L} = \frac{1}{(x \pm L) + \mathrm{i}y} = \frac{1}{(x \pm L) + \mathrm{i}y}\frac{(x \pm L) - \mathrm{i}y}{(x \pm L) - \mathrm{i}y} = \frac{(x \pm L) - \mathrm{i}y}{(x \pm L)^2 + y^2}$$

kann der Ausdruck vereinfacht und nach Real- und Imaginärteil sortiert werden

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dz} = & \underbrace{\left[U_\infty \cos(\alpha) + \frac{E_Q}{2\pi}\frac{x+L}{(x+L)^2+y^2} + \frac{E_S}{2\pi}\frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}\right]}_{=u(x,y)} \\ & -\mathrm{i}\underbrace{\left[U_\infty \sin(\alpha) + \frac{E_Q}{2\pi}\frac{y}{(x+L)^2+y^2} + \frac{E_S}{2\pi}\frac{y}{(x-L)^2+y^2}\right]}_{=v(x,y)}\end{aligned}$$

c) Für $\alpha = 0$ folgt aus $v(x_s, y_s) = 0$ bzw. aus Gründen der Symmetrie, dass die Staupunkte auf $y_s = 0$ liegen sowie der Betrag der Ergiebigkeiten gleich sein muss, d.h., $|E_Q| = |E_S| =: E$, wobei $E_Q = E$ und $E_S = -E$. Mit $u(x_s = -2L, y_s = 0) = 0$ bestimmt sich E zu

$$\begin{aligned} & u(x_s = -2L, y_s = 0, \alpha = 0) = U_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{-L}{(-L)^2} - \frac{E}{2\pi}\frac{-3L}{(-3L)^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 0 = U_\infty 2\pi L + E\left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\ \Rightarrow \quad & E = 3\pi U_\infty L \end{aligned}$$

d) Mit $\alpha = \pi : \sin(\alpha) = 0,\ \cos(\alpha) = -1$ und $E = E_Q = -E_S$ folgt

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{E}{2\pi}y\left[\frac{1}{(x+L)^2+y^2} - \frac{1}{(x-L)^2+y^2}\right] \stackrel{!}{=} 0 \\ y = 0 \quad \vee \quad & \left[\frac{1}{(x+L)^2+y^2} - \frac{1}{(x-L)^2+y^2}\right] = 0 \\ & \Rightarrow [(x-L)^2+y^2] - [(x+L)^2+y^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Überprüfung der Nullstellen für die u Komponente

$$u(x,y) = -U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left[\frac{x+L}{(x+L)^2+y^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}\right]$$

$$u(x=0,y) = -U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left[\frac{L}{(L)^2+y^2} - \frac{-L}{(-L)^2+y^2}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -U_\infty + \frac{E}{\pi}\frac{L}{L^2+y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{EL}{\pi U_\infty} - L^2 \overset{c)}{=} 2L^2$$

$$\Rightarrow (x_{sp}, y_{sp})_{1,2} = (0, \pm\sqrt{2}L)$$

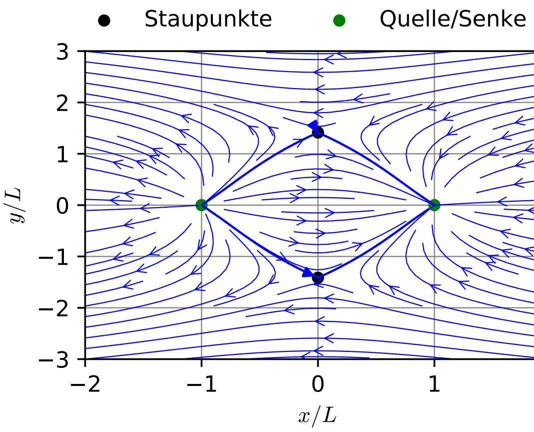
$$u(x,y=0) = -U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left[\frac{x+L}{(x+L)^2+y^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2+y^2}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left[\frac{x+L}{(x+L)^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2}\right] = -U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left[\frac{(x-L)-(x+L)}{(x+L)(x-L)}\right]$$

$$= -U_\infty + \frac{E}{\pi}\left[\frac{-L}{x^2-L^2}\right] \rightarrow x^2 = L^2 - \frac{EL}{\pi U_\infty} \overset{c)}{=} -2L^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-2L^2} \rightarrow \text{Physikalisch bedeutungslos, da imaginär}$$

Die zwei Staunpunkte sind somit $(x_{sp}, y_{sp})_{1,2} = (0, \pm\sqrt{2}L)$.



Stromlinien
Staupunkte

4. Aufgabe (11 Punkte)

a) Mittels drei Randbedingungen und dem gegebenen Verhältnis $\frac{u_B}{u_\infty} = K$ können die unbekannten a_i bestimmt werden

Haftbedingung: $\frac{y}{\delta} = 0 : u = u_B \quad \rightarrow a_0 = \frac{u_B}{u_\infty} = K$

Grenzschichtrand: $\frac{y}{\delta} = 1 : u = u_\infty \quad \rightarrow a_1 + a_2 = 1 - \frac{u_B}{u_\infty} = 1 - K$

Wandbindung aus x-Impulsgl.: $\frac{y}{\delta} = 0 : \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \overset{hier}{=} 0 \quad \rightarrow a_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{u}{u_\infty} = K + (1-K)\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

b) Mit $u_a \equiv u_\infty \rightarrow \frac{du_a}{dx} = 0$ vereinfacht sich die von Kármánsche Integralbeziehung. Über die Definition der Wandschubspannung und der Impulsverlustdicke kann δ bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \left[\frac{u}{u_\infty} - \left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
&= \delta \int_0^1 \left[\left(K + (1-K)\left(\frac{y}{\delta}\right)\right) - \left(K + (1-K)\left(\frac{y}{\delta}\right)\right)^2\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
&= \delta \int_0^1 \left[\left(K + (1-K)\left(\frac{y}{\delta}\right)\right) - \left(K^2 + 2K(1-K)\left(\frac{y}{\delta}\right) + (1-K)^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
&= \delta \int_0^1 \left[(K-K^2) + (1-3K+2K^2)\left(\frac{y}{\delta}\right) - (1-K)^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
&= \delta \left[(K-K^2)\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2}(1-3K+2K^2)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3}(1-K)^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \delta\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}K - \frac{1}{3}K^2\right] = \frac{\delta}{6}\underbrace{\left[1 + K - 2K^2\right]}_{:=\phi}
\end{aligned}$$

$$\tau_W = -\tau(y=0) = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \eta u_\infty (1-K)\frac{1}{\delta}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} - \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{6}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{\rho u_\infty^2}\frac{\eta u_\infty (1-K)}{\delta}$$

$$\Rightarrow \int \delta d\delta = \frac{6\eta(1-K)}{\phi \rho u_\infty}\int dx \quad \text{mit } \delta(x=0) = 0 \text{ folgt}$$

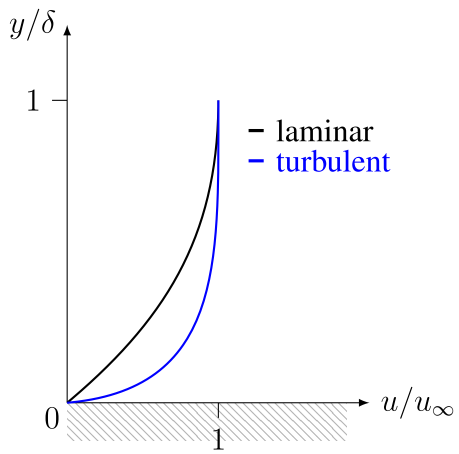
$$\Rightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{12\eta(1-K)}{\phi\rho u_\infty}x}$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{12\eta(1-K)}{(1+K-2K^2)\,\rho u_\infty}x}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{F_R}{B} &= \int_0^L \tau_W(x)dx \\
&= \int_0^L \frac{\eta u_\infty(1-K)}{\delta(x)}dx = \int_0^L \frac{\eta u_\infty(1-K)}{1}\sqrt{\frac{\phi\rho u_\infty}{12\eta(1-K)x}}dx \\
&= \eta u_\infty(1-K)\sqrt{\frac{\phi\rho u_\infty}{12\eta(1-K)}}2\sqrt{L} \\
&= \eta u_\infty(1-K)\sqrt{\frac{(1+K-2K^2)\,\rho u_\infty}{12\eta(1-K)}}2\sqrt{L}
\end{aligned}
$$

d) Der Umschlag von einer laminaren auf eine turbulente Grenzschicht kann durch gezielte Störung der Strömung erreicht werden. Technische Maßnahmen sind z.B. Stolperdrahte, Rauigkeitsveränderungen der Oberfläche oder Wirbelgeneratoren.
Bei einer turbulenten Grenzschicht wird durch zusätzliche Mischbewegungen mehr Impuls in Wandnähe transportiert, wodurch das Geschwindigkeitsprofil bauchiger wird und die Reibkraft ansteigt.



5. Aufgabe (7 Punkte)

a) Der kritische Zustand ist ein Referenzzustand, bei dem im engsten Querschnitt $M = 1$ erreicht wird.

$$\text{Energiegleichung: } h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$
$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \quad \text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{\gamma R T}$$
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Im kritischen Zustand gilt $M = 1$. Somit folgt das kritisches Druckverhältnis direkt aus der Isentropenbeziehung:

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}$$
$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$
$$= 0.528\,.$$

b) Der Massenstrom wird bestimmt über die Zustände am engsten Querschnitt

$$\dot{m} = \rho^* u^* A^*$$
$$\rho^* = \rho_0 \frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{p_0}{R T_0}\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$
$$h_0 = \frac{u^{*2}}{2} + h^*$$
$$\Rightarrow c_p T_0 = \frac{u^{*2}}{2} + c_p T^* \quad \Rightarrow \quad \frac{u^{*2}}{2} = c_p T_0 \left(1 - \frac{T^*}{T_0}\right) = \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T^*}{T_0}\right)$$
$$\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1}\left(1 - \frac{T^*}{T_0}\right)}$$
$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A^* \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right)}$$

c) Mit $p_e = p_a$ folgt aus dem Hinweis direkt, dass

$$A^* = A_e \frac{\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

6. Aufgabe (6 Punkte)

a) Mit dem Buckinghamschen Π-Theorem erhält man die maximale Anzahl von Kennzahlen eines physikalischen Problems. Da in der DGL noch weitere Informationen stecken, ist die Anzahl der Kennzahlen, die mit der Methode der DGL'en erhalten werden kleiner oder gleich der Anzahl der Kennzahlen, die durch das Buckinghamsche Π-Theorem erhalten werden.

b) In der Potentialströmung muss $\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ gelten. In einer Grenzschicht ist dies jedoch nicht erfüllt, da ein Gradient in Wandnormalenrichtung besteht, sodass für den 2D Fall $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq \dfrac{\partial v}{\partial x}$ gilt.

c) Meereswellen in Strandnähe gehören zu den Flachwasserwellen. Für diese gilt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Wassertiefe abnimmt. Da die Wassertiefe an einer seicht ansteigenden Küste vom Meer zum Strand abnimmt, werden nicht-parallele Wellenfronten auf der strandnahen Seite stärker abgebremst als auf der strandfernen, wodurch sich die Wellenfront parallel zum Strand ausrichtet.

d) Nein. Die Öffnung des Prandtlohrs muss deutlich aus der Grenzschicht herausragen, damit der Staudruck in der reibungsfrei zu betrachtenden Strömung bestimmt werden kann. Der statische Druck ist zwar normal zur Körperoberfläche konstant, jedoch ist der Staudruck in der Grenzschicht aufgrund der niedrigeren Geschwindigkeiten gegenüber der Außenströmung reduziert, sodass es zu einer falschen Bestimmung der Geschwindigkeit käme.

e) Der Machsche Winkel ist definiert über $\sin \alpha = \dfrac{c}{u} = \dfrac{1}{M}$.