....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

14. 03. 2024

1. Aufgabe (12 Punkte)

a) Einflussgrößen: $k:\quad \rho_0, c, \eta, s, f$

Dimensionen: $r:\quad M, L, T$ (2 wiederkehrende Variablen)

$\Rightarrow k = 5, r = 3 \rightarrow k - r = 2$ Kennzahlen

b) Wahl der wiederkehrenden Variablen z.B.: ρ, c, s

$$\begin{aligned}
\Pi_1 =& \eta \quad \rho_0^{\alpha_1} c^{\beta_1} s^{\gamma_1} \\
& M: 1 + 1\alpha_1 + 0\beta_1 + 0\gamma_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -1 \\
& T: -1 + 0\alpha_1 - 1\beta_1 + 0\gamma_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = -1 \\
& L: -1 - 3\alpha_1 + 1\beta_1 + 1\gamma_1 = 0 \rightarrow \beta_1 + \gamma_1 = -2 \rightarrow \gamma_1 = -1 \\
& \Rightarrow \Pi_1 = \eta \quad \rho_0^{-1} c^{-1} s^{-1} = \frac{\eta}{\rho_0 c s}
\end{aligned}$$

$$\Pi_2 = f \quad \rho_0^{\alpha_3} c^{\beta_3} s^{\gamma_3} \quad \Rightarrow \quad \Pi_2 = f \quad \rho_0^0 c^{-1} s^1 = \frac{fs}{c}$$

c) Die gefundenen Kennzahlen lassen sich auf die Reynoldszahl Re sowie Strouhalzahl Sr zurückführen.

$$\Pi_1 = \frac{\eta}{\rho_0 c s} = \frac{1}{Re} \qquad \Pi_2 = \frac{fs}{c} = Sr$$

d) Einführen von dimensionslosen Größen: $\overline{\rho'} = \frac{\rho'}{\rho_0}$, $\bar{t} = t\, f$, $\overline{x} = \frac{x}{s}$, $\overline{Q} = \frac{Q}{\rho_0 f}$,

Für die Differentiale folgt somit $\frac{\partial()}{\partial t} = \frac{\partial()}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = f\frac{\partial()}{\partial \bar{t}}$ und $\nabla = \frac{1}{s}\bar{\nabla}$.

Eingesetzt in die DGL liefert dies

$$\begin{aligned}
f^2\frac{\partial^2(\bar{\rho}'\rho_0)}{\partial \bar{t}^2} - c^2\frac{1}{s^2}\bar{\nabla}^2(\bar{\rho}'\rho_0) &= f\frac{\partial(\bar{Q}\rho_0 f)}{\partial \bar{t}} \\
\rightarrow f^2\rho_0\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial \bar{t}^2} - \frac{c^2\rho_0}{s^2}\bar{\nabla}^2\bar{\rho}' &= f\rho_0 f\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} \qquad \Big|: f^2\rho_0 \\
\rightarrow \frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial \bar{t}^2} - \frac{c^2}{s^2 f^2}\bar{\nabla}^2\bar{\rho}' &= \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{t}} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{d)} = \frac{c^2}{s^2 f^2}
\end{aligned}$$

e) Die Kennzahl $\Pi_{d)}$ ist eine Kombination der in c) gefundenen Kennzahl Π_2

$$\Pi_{d)} = \frac{c^2}{s^2 f^2} = \frac{1}{Sr^2}\,.$$

f) Im Gegensatz zu dem Π-Theorem enthält die DGL weitere Informationen über das Problem, wodurch die Anzahl der Kennzahlen kleiner sein kann, wenn diese mittels der Methode der DGL bestimmt werden.

Bei der Bestimmung mithilfe der Methode der DGL fehlt die Reynoldszahl, da die gegebene Gleichung nur für reibungsfreie Strömungen gültig ist. Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis von Trägheits- und Zähigkeitskraft.

2. Aufgabe (11 Punkte)

a) Mit Hilfe der x-Impulsgleichung für stationäre, schleichende Strömungen folgt

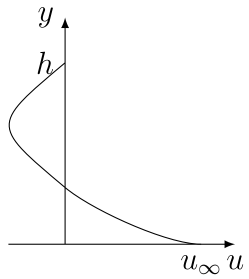
$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1 \quad \rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Die Konstanten über Randbedingung bestimmen

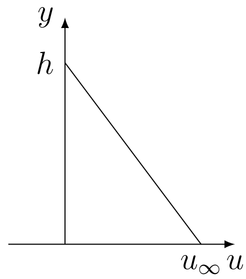
$$u(y=0) = u_\infty \quad \rightarrow \quad C_2 = u_\infty$$
$$u(y=h) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}h^2 + u_\infty\right)$$
$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y(y-h) + u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

b)

i) Kammer gefüllt



ii) Kammer noch nicht gefüllt



c) Der Volumenstrom $\dot{V}$ durch den Spalt muss Null sein

$$\dot{V} = b\int_0^h u(y)dy \stackrel{!}{=} 0$$
$$= b\left[\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2}\right) + u_\infty\left(y - \frac{y^2}{2h}\right)\right]\Bigg|_0^h = \frac{1}{2}bh\left(u_\infty - \frac{h^2}{6\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\eta}{h^2}u_\infty \qquad \Bigg| \int_0^x dx$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{6\eta}{h^2}u_\infty x + p_a$$

d)

$$F_T = b\int_0^{L+k}(p(x) - p_a)dx$$
$$= b\int_0^L (p(x) - p_a)dx + b\int_L^{L+k}(p_K - p_a)dx$$
$$\text{mit } p_K = p(x=L) = \frac{6\eta}{h^2}u_\infty L + p_a$$
$$\Rightarrow F_T = \frac{3\eta}{h^2}u_\infty L^2 b + \frac{6\eta}{h^2}u_\infty L k b$$

3. Aufgabe   (11 Punkte)

a) Drehungsfreiheit

b) Das Strömungsfeld ist mit der Überlagerung einer Parallelströmung und eines Dipols darstellbar

$$F(z) = u_\infty z + \frac{M}{2\pi z}\ , \text{ mit } M, u_\infty > 0$$

c) Bestimmung der Geschwindigkeit mithilfe der konjugiert komplexen Geschwindigkeit $\bar{w}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dz} &= \bar{w} = u - \mathrm{i}v = u_\infty - \frac{M}{2\pi z^2} \\
&= u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2} e^{-\mathrm{i}2\varphi} = u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2}(\cos(-2\varphi) + \mathrm{i}\sin(-2\varphi)) \\
&= u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2}(\cos(2\varphi) - \mathrm{i}\sin(2\varphi)) \\
\rightarrow u(r,\varphi) &= u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2}\cos(2\varphi) \\
\rightarrow v(r,\varphi) &= \frac{-M}{2\pi r^2}\sin(2\varphi)
\end{aligned}$$

d) Im Staupunkt $(x = -D/2, y = 0)$ bzw. $(r = D/2, \varphi = \pi)$ gilt $u = v = 0$.

$$\begin{aligned}
u(r = D/2, \varphi = \pi) = 0 &= u_\infty - \frac{M}{2\pi (D/2)^2}\cos(2\pi) = u_\infty - \frac{M}{\pi D^2/2} \\
\Rightarrow M &= \frac{u_\infty \pi D^2}{2}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
F(z) &= u_\infty(x + \mathrm{i}y) + \frac{M}{2\pi r}e^{-\mathrm{i}\varphi} \\
&= \left(u_\infty x + \frac{M}{2\pi r}\cos(\varphi)\right) + \mathrm{i}\left(u_\infty y - \frac{M}{2\pi r}\sin(\varphi)\right) \\
\rightarrow \Psi &= \Im\{F(z)\} = u_\infty y - \frac{M}{2\pi r}\sin(\varphi) \\
\Psi(-D, \pm D) &= \pm u_\infty D - \frac{M}{2\pi\sqrt{2}D}\sin\left(\pi \mp \frac{\pi}{4}\right) \\
\dot{V} &= (\Psi(-D, D) - \Psi(-D, -D))\, t \\
&= \left(2u_\infty D - \frac{M}{2\pi\sqrt{2}D}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\ t \\
&= 2u_\infty D\, t - \frac{M}{2\pi D}\, t
\end{aligned}$$

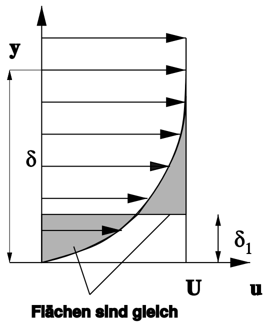
4. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Wandschubspannung nimmt unphysikalische Werte an:

$$\tau_w = \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\frac{6}{7}} \frac{1}{\delta} u_\infty \frac{1}{7} \to \infty$$

b) Verdrängungsdicke beschreibt die Schichtdicke, um die ein Körper aufgedickt werden muss, um in einer theoretisch reibungsfreien Strömung den gleichen Massenstrom wie in der tatsächlichen reibungsbehafteten Strömung zu erfüllen.



$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

c)

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

$$= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) dy = \left[\frac{7}{8}\frac{y^{8/7}}{\delta^{1/7}} - \frac{7}{9}\frac{y^{9/7}}{\delta^{2/7}}\right]\Bigg|_0^\delta = \delta\left(\frac{7}{8} - \frac{7}{9}\right) = \frac{7}{72}\delta$$

d) Ebene Platte mit konstanter Außenströmung $\frac{du_\infty}{dx} = 0$.

$$\to \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \quad \to \quad \frac{1}{10}\frac{d\delta}{dx} = \alpha \left(\frac{u_\infty \delta}{\nu}\right)^{-\beta}$$

$$\int \delta^\beta d\delta = \int 10\alpha \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{-\beta} dx \quad \to \quad \frac{1}{1+\beta}\delta^{\beta+1} = 10\alpha \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{-\beta} x + C_1$$

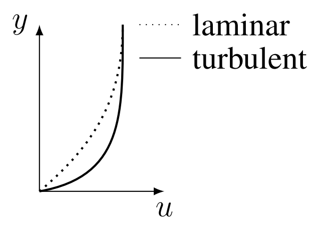
$$\delta = \left(10\alpha(\beta+1)\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{-\beta} x\right)^{\frac{1}{\beta+1}} + C_2$$

Mit $\delta(x=0) = 0 \to C_2 = 0$

$$\Rightarrow \delta = \left(10\alpha(\beta+1)\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{-\beta} x\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$

$$= \left(10\alpha(\beta+1)\left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{\beta} x^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} = \left(10\alpha(\beta+1)Re_x^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} x$$

e) In einer turbulenten Grenzschicht herrscht ein höherer Impulsaustausch normal zur Wand aufgrund der existierenden turbulenten Schwankungsbewegungen. Dadurch wird das Geschwindigkeitsprofil fülliger.



5. Aufgabe   (7 Punkte)

a)

$$
\begin{aligned}
\text{Energiegleichung: } h_0 &= h_e + \frac{u_e^2}{2} \\
c_p T_0 &= c_p T_e + \frac{u_e^2}{2} \quad \text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \\
\frac{T_0}{T_e} &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_e^2}{\gamma R T_e} \\
\frac{T_0}{T_e} &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2
\end{aligned}
$$

Im engsten Querschnitt gilt $M_e = 1$. Somit folgt das gesuchte Druckverhältnis direkt aus der Isentropenbeziehung:

$$
\begin{aligned}
\frac{T_0}{T_e} &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2} \\
\frac{p_e}{p_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= 0.528\,.
\end{aligned}
$$

b) Der Massenstrom wird bestimmt über die Zustände am engsten Querschnitt

$$
\begin{aligned}
\dot{m} &= \dot{m}_e = \rho_e u_e A_e \\
\rho_e &= \rho_0 \frac{\rho_e}{\rho_0} = \frac{p_0}{R T_0} \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
h_0 &= \frac{u_e^2}{2} + h_e \\
\Rightarrow c_p T_0 &= \frac{u_e^2}{2} + c_p T_e \quad \Rightarrow \quad \frac{u_e^2}{2} = c_p T_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right) = \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right) \\
\Rightarrow u_e &= \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right)} \\
\Rightarrow \dot{m} &= \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A_e \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right)}
\end{aligned}
$$

c) Mit $p_a = p_\infty$ folgt aus dem Hinweis direkt, dass

$$
A_e = A_a \frac{\left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}}\,.
$$

6. Aufgabe (8 Punkte)

a)
1. In dem Bereich des Staupunkts auf der Oberfläche ist $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ nicht erfüllt.
2. Ablösungen können bei ausreichend hoher Anstellung entstehen. In den Rezirkulationsgebieten ist $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ nicht erfüllt.

b) Es muss gelten

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Für eine ausgebildete Strömung gilt $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und daraus folgt $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Dies steht im Widerspruch mit der Wandbedingung $\vec{v} = \vec{0}$ und einer gleichzeitig präsenten Außenströmung.

c)
1. Erzwingen eines turbulenten Umschlages mittels aufgebrachter Störung z.B. durch Stolperdraht, Wirbelgenerator o.ä.
2. Grenzschichtabsaugung
3. Ausblasung

d) Die Kuttasche Abströmbedingung beschreibt das glatte Abfließen an Profilen mit scharfer Hinterkante.
Damit die Strömung um die Hinterkante fließen kann, muss ein extrem großer Geschwindigkeitsgradient präsent sein. In einer realen Strömung wird dies durch die entgegenwirkende Reibungskraft verhindert. Diese existiert jedoch nicht in der Potentialströmung, sodass die Strömung um eine scharfe Hinterkante fließen kann.
Durch das Einbringen zusätzlicher Zirkulation kann das glatte Abließen in der Theorie erreicht werden.