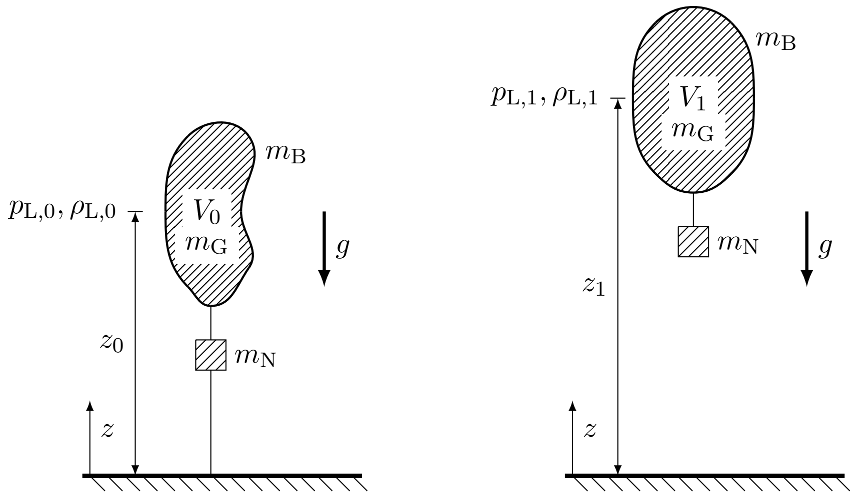
....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

13. 03. 2025

1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Wetterballon wird am Erdboden mit Gas bis zu einem Volumen V_0 gefüllt und verschlossen. Der Luftdruck am Erdboden ist $p_{L,0}$ und die dortige Dichte der Luft $\rho_{L,0}$. Nun wird der Ballon zum Aufsteigen frei gelassen und der Ballon bläht sich durch die Volumenzunahme der Gas-Füllung auf. Nehmen Sie an, dass der Ballon ideal schlaff ist, so dass der Zustand des Gases im Ballon, also Druck und Temperatur, zu jeder Zeit dem Zustand der Atmosphäre entspricht.



Am Boden $V_0 < V_1, z_0 < z_1$ Bei der maximalen Steighöhe z_1

a) Bestimmen Sie die **maximale Masse** m_N der Nutzlast, wenn der Wetterballon in der Höhe z_1 sein maximales Volumen V_1 erreicht. Nehmen Sie zunächst an, dass Sie die Dichte der Luft $\rho_{L,1}$ in der Höhe z_1 kennen.

Für die nachfolgenden Teilaufgaben ist die Dichte der Luft $\rho_{L,1}$ in der Höhe z_1 nicht mehr gegeben. Stattdessen wird der Zustand der Atmosphäre mittels der polytropen Zustandsgleichung, das heißt $p\rho^{-n} = \mathrm{const}$, mit Polytropenindex $n = \mathrm{const}$ und $n \neq 1$ modelliert.

b) Leiten Sie einen Ausdruck für die **Dichte der Luft** $\rho_{L,1}$ in der Höhe z_1 mit Hilfe des Modells der **polytropen Atmosphäre** und der lokalen Impulsbilanz $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ her. In dieser Teilaufgabe ist z_1 als gegeben anzunehmen.

c) Bestimmen Sie die **maximale Steighöhe** z_1 in der polytropen Atmosphäre. Nehmen Sie das Füllgas als ideales Gas an.

Gegeben:

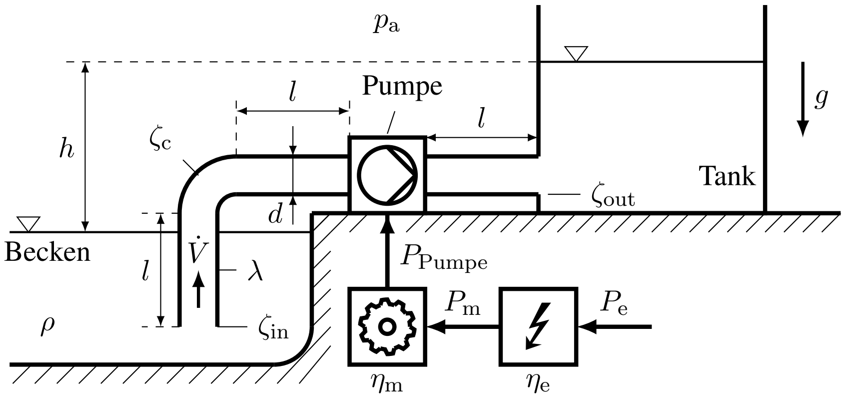
$g, \quad V_0, \quad V_1, \quad m_B, \quad m_G, \quad \rho_{L,0}, \quad p_{L,0}, \quad z_0, \quad n$

Hinweis:

- Die Zustandsänderung von Dichte und Temperatur der Atmosphäre über die Ballonabmaße sind gegenüber der Steighöhe zu vernachlässigen.
- Der Auftrieb durch das Volumen der Nutzmasse m_N, der Ballonmasse m_B und des Seils zwischen der Nutzlast und dem Ballon sind zu vernachlässigen.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Eine Pumpe saugt durch eine Rohrleitung mit dem Durchmesser d Wasser mit konstanter Dichte ρ und Volumenstrom $\dot{V}$ aus einem sehr großem offenen Becken an und füllt einen sehr großen offenen Tank. Alle Rohre der Rohrleitung sind kreisrund und haben den Durchmesser d und den Rohrreibungsbeiwert λ. Die Verlustbeiwerte sind für den Eintritt ζ_{in}, für die Krümmung ζ_{c} und für den Austritt der Rohrleitung ζ_{out}. Der Wasserspiegel im Tank liegt mit der Höhe h über dem des Beckens.



a) Berechnen Sie die **Druckdifferenz** Δp_{Pumpe} über die Pumpe im stationären Betrieb.

Ein Elektromotor mit elektrischem Wirkungsgrad η_{e} treibt das Getriebe der Pumpe an. Das Getriebe zusammen mit der Mechanik der Pumpe weist einen mechanischen Wirkungsgrad η_{m} auf, um den Druck des Fluids zu erhöhen.

b) Berechnen Sie die **elektrische Leistung** P_{e} für den stationären Betrieb der Pumpe.

c) Berechnen Sie den **fluiddynamischen Wirkungsgrad** η_{fd} mit der verlustfreien Pumpleistung $P_{\text{Pumpe}}^{\text{verlustfrei}}$ über die Höhe h als Nutzen und der verlustbehafteten Pumpleistung P_{Pumpe} als Aufwand. Führen Sie eine Plausibilitätsprüfung durch.

d) Berechnen Sie den **Gesamtwirkungsgrad** der Anlage η mit der verlustfreien Pumpleistung $P_{\text{Pumpe}}^{\text{verlustfrei}}$ über die Höhe h als Nutzen und der elektrischen Leistung P_{e} als Aufwand.

Gegeben:

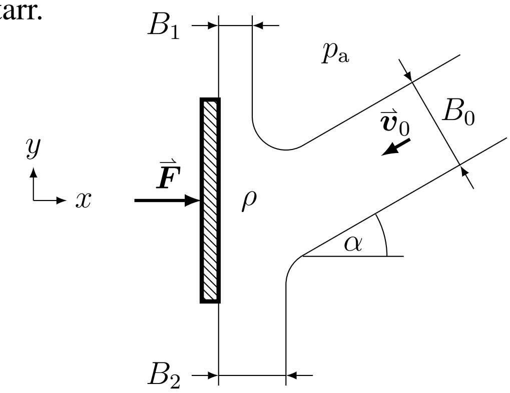
$\rho, \quad g, \quad h, \quad \zeta = \zeta_{\text{in}} + \zeta_{\text{c}} + \zeta_{\text{out}}, \quad \lambda, \quad l, \quad d, \quad \dot{V}, \quad \eta_{\text{e}}, \quad \eta_{\text{m}}$

Hinweis:

- Die Atmosphäre weist einen über die Höhe konstanten Druck p_{a} auf.
- Die Pumpleistung kann als Druckänderungsleistung für ein inkompressibles Fluid wie folgt berrechnet werden: $P_{\text{Pumpe}} = \Delta p_{\text{Pumpe}} \dot{V}$
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

3. Aufgabe (11 Punkte)

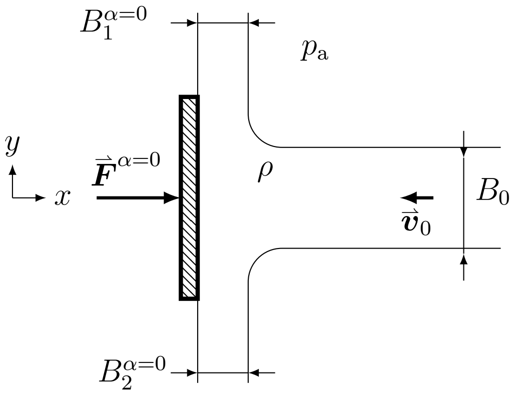
Eine Platte mit scharfen Kanten wird mit einem Wasserstrahl mit konstanter Dichte ρ, einer Breite B_0 und einer Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ angestrahlt. Der horizontale Wasserstrahl trifft unter dem Winkel α gegenüber der x-Achse auf die Platte und wird auf der Platte in zwei Strahlen parallel zur y-Achse geteilt. Der obere Strahl hat die Breite B_1 und der untere Strahl die Breite B_2. Die Platte wird mit einer Kraft $\vec{\boldsymbol{F}} = F_x \vec{\boldsymbol{e}}_x$ fest gehalten. Die Tiefenausdehnung dieses zweidimensionalen Problems ist T. Die Strömung im Strahl ist reibungsfrei und stationär, und die Platte ist ortsfest und starr.



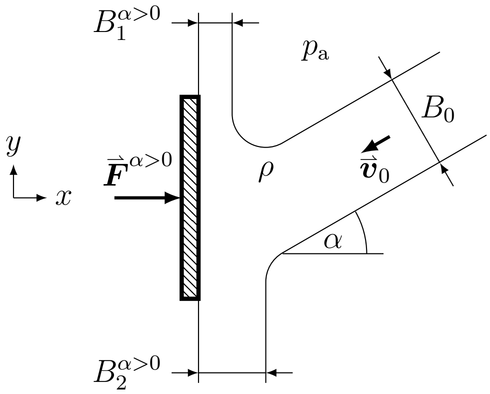
a) Berechnen Sie die **Kraft vom Fluid auf die Platte** in x-Richtung F'_x und in y-Richtung F'_y pro Tiefenausdehnung T.

b) Berechnen Sie die **Breiten** B_1 und B_2 der abströmenden Strahlen.

c) Skizzieren Sie sorgfältig den **qualitativen Verlauf des Überdrucks** $p(y) - p_\mathrm{a}$ auf der Platte in y-Richtung für den reibungsfreien und für den reibungsbehafteten Fall jeweils für die Konfigurationen mit Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha > 0$, welche nachfolgend skizziert sind.



Skizze 1: Konfiguration $\alpha = 0$



Skizze 2: Konfiguration $\alpha > 0$

Gegeben:

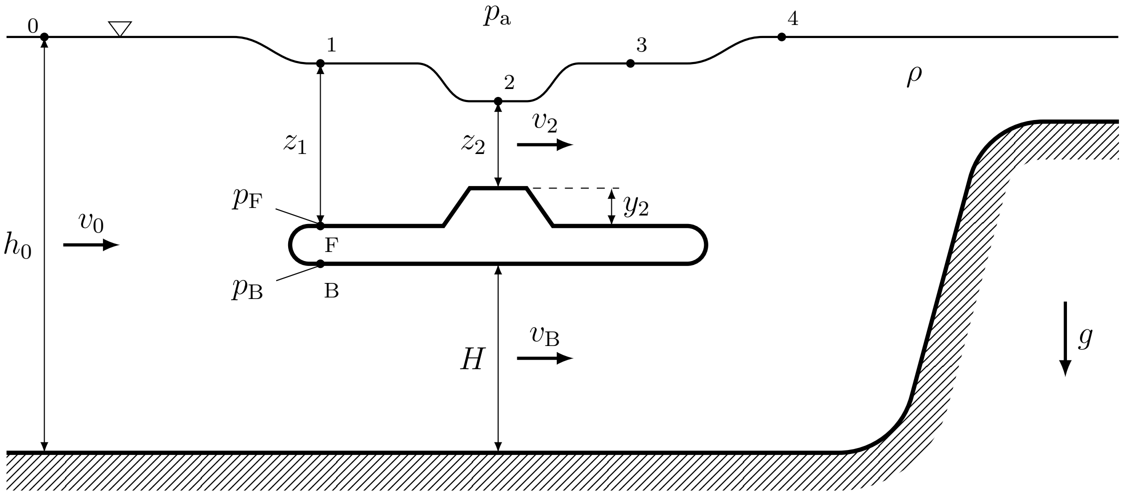
$\rho, \quad v_0, \quad \alpha, \quad B_0$

Hinweis:

- Die Atmosphäre weist einen über die Höhe konstanten Druck p_a auf.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

4. Aufgabe (9 Punkte)

Ein U-Boot wird aus einer aufgestauten inkompressiblen Strömung geborgen. Beim Anheben des U-Boots auf die Höhe H stellen sich die Drücke p_B auf der Bodenseite und p_F auf der Front-Oberseite ein. Die Strömung wird als verlustfrei, stationär und zweidimensional angesehen. Oberhalb des U-Boots stellt sich eine offene Gerinneströmung ohne Wassersprung ein und über dem U-Bootturm mit der Höhe y_2 wird der kritische Zustand erreicht.



a) Berechnen Sie die **Geschwindigkeit** v_B an der Bodenseite B des U-Boots.

b) Berechnen Sie die **Höhe des Turms** y_2, bei der der kritische Zustand erreicht wird. Die Geschwindigkeit v_B soll in diesem Aufgabenteil als gegeben angenommen werden.

c) Zeichnen Sie sorgfältig das qualitative **Energiehöhendiagramm** entlang der Wasseroberfläche von Punkt 0 nach Punkt 4. Nehmen Sie an, dass die Strömung bei Punkt 0 unterkritisch ist.

Gegeben:

$\rho, \quad g, \quad p_\mathrm{a}, \quad v_0, \quad h_0, \quad p_\mathrm{F}, \quad p_\mathrm{B}, \quad H$

Hinweis:

- Das U-Boot wird als unendlich ausgedehnt angenommen, so dass die Strömung als zweidimensional betrachtet wird.
- Für die vorliegende offene Gerinneströmung mit $q = \frac{\dot{V}}{B}$ gilt:

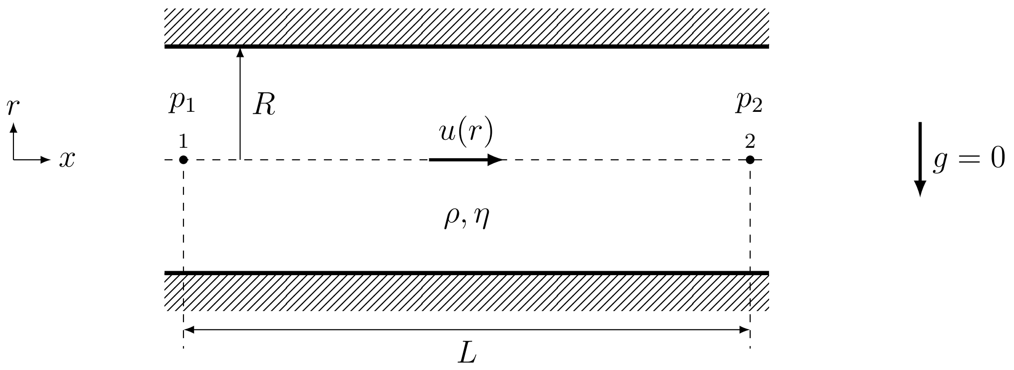
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = 1 - \frac{q^2}{gz^3} \qquad \text{und} \qquad z_\mathrm{gr} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$H_\mathrm{min} = \frac{3}{2} z_\mathrm{gr} \qquad \text{und} \qquad v_\mathrm{gr} = \frac{q}{z_\mathrm{gr}} = \sqrt{g z_\mathrm{gr}}$$

- Die Atmosphäre weist einen über die Höhe konstanten Druck p_a auf.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

5. Aufgabe (11 Punkte)

Eine Pipeline mit kreiszylindrischen Querschnitt und Radius R wird laminar mit einem Newtonschen Fluid konstanter Dichte ρ und konstanter Viskosität η durchströmt. Die Strömung ist stationär, vollständig ausgebildet und rotationssymmetrisch. Somit hängt die Scherspannung $\tau(r)$ nur von der radialen Koordinate r und der Druck $p(x)$ nur von der Hauptströmungsrichtung x ab.



a) Leiten Sie anhand eines Volumenelements die **Differentialgleichung** zur Bestimmung der **Schubspannungsverteilung** $\tau(r)$ her. Skizzieren Sie sorgfältig das differentielle Element und die darauf wirkenden relevanten Kräfte.

b) Bestimmen Sie die **Geschwindigkeitsverteilung** $u(r)$.

c) Leiten Sie die **Wandschubspannung** τ_w und die **mittlere Geschwindigkeit** u_m her.

d) Zeigen Sie, dass für den **Rohrreibungsbeiwert** λ aus der Definition des Druckverlusts

$$\Delta p^{\mathrm{Verlust}} = p_1 - p_2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} u_\mathrm{m}^2$$

folgt:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}_D}$$

e) Beschreiben Sie, wie sich die **funktionale Abhängigkeit des Drucks** p ändert, insofern der Einfluss der **Gravitation** über die radiale Ausdehnung nicht vernachlässigt werden darf, also $g > 0$ gilt. Es handelt sich nach wie vor um eine stationäre, laminare, voll ausgebildete, inkompressible Strömung.

Gegeben:

$R, \quad L, \quad p_1, \quad p_2, \quad \eta, \quad$ mit $p_1 > p_2$

Hinweis:

- Der Einfluss der Gravitation über die radiale Ausdehnung der Pipeline ist in Aufgabe a) bis d) zu vernachlässigen, so dass $g = 0$ gilt.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

6. Aufgabe (8 Punkte)

a) Skizzieren Sie qualitativ das **Moody-Diagramm**. Beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie die unterschiedlichen Strömungszustände. Es müssen keine Gleichungen angegeben werden.

b) Entscheiden Sie quantitativ begründet, ob der **Druckverlust** $\Delta p^{\mathrm{Verlust}}$ auf Grund von Reibung für eine stationäre, laminare, voll ausgebildete, inkompressible Kreisrohrströmung nach Blasius für steigende Reynoldszahlen Re_D für das gleiche Fluid **ab oder zu nimmt**.

c) Inwiefern unterscheiden sich die **Integralkurven** Stromlinie, Bahnlinie und Rauchlinie für ein **stationäres Strömungsfeld**?

d) Drücken Sie die turbulente Schubspannung τ_{t} für eine turbulente Strömung $\vec{\boldsymbol{v}} = u\vec{\boldsymbol{e}}_x + v'\vec{\boldsymbol{e}}_y$ anhand des **Ansatzes nach Boussinesq** aus. Geben Sie zusätzlich den Ansatz der **Prandtl'schen Mischungsweghypothese** zur Bestimmung der turbulenten Zähigkeit η_{t} an.

Hinweis:

- Die Teilaufgabe b) ist an die Aufgabe 5, insbesondere an die Teilaufgabe 5 d), angelehnt.
- Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.