

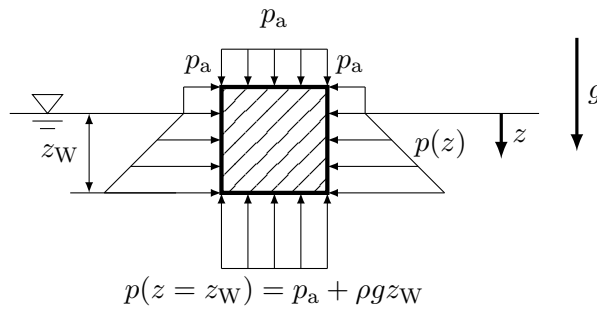
.....
(Matrikelnummer, Unterschrift)

Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik I“

10. 09. 2025

1. Aufgabe

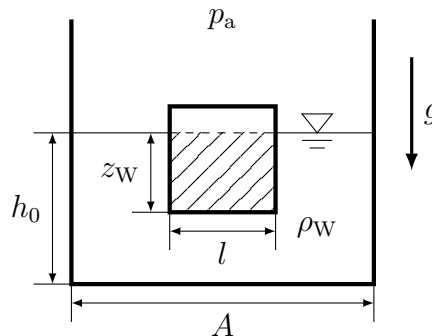
a) Skizze des Druckverlaufs über die gesamte Oberfläche des Eiswürfels:



Kriterien an die Skizze:

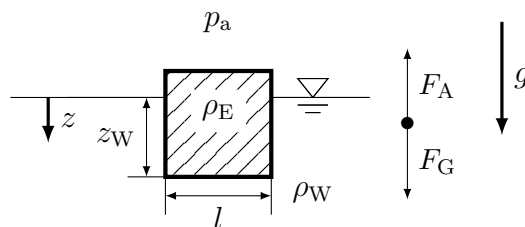
- Konstanter Umgebungsdruck p_a in der Luftphase
- Da das Wasser inkompressibel ist, linearer Anstieg des Drucks in z -Richtung an der Seite des Würfels ohne Sprung, also stetig von p_a bis $p(z = z_W)$ in der Wasserphase mit der Tiefe z_W
- Der Druck auf der Unterseite des Würfels ist konstant

Da der Auftrieb in der Luftphase zu vernachlässigen ist, trägt nur der Teil des Volumens des Eiswürfels, welcher unter der Wasseroberfläche ist, zur Auftriebskraft bei. Der Teil des Volumens des Eiswürfels, der zum Auftrieb nach Auftriebssatz von Archimedes beiträgt, ist nachfolgend schraffiert gekennzeichnet.



b) Statische globale Impulsbilanz (Kräftegleichgewicht) in z -Richtung für den Eiswürfel:

$$\underbrace{\frac{dI_z}{dt}}_{\text{da statisch}} = F_G - F_A$$



Kräfte:

Auftriebskraft:	$F_A = F_A^W + \cancel{F_A^L}$	Auftrieb F_A^L in der Luft zu vernachlässigen nach Auftriebssatz von Archimedes
	$= \rho_W z_W l^2 g$	
Gewichtskraft:	$F_G = \rho_E l^3 g$	

Somit ergibt sich:

$$0 = \rho_E l^3 g - \rho_W z_W l^2 g \quad \left| \text{mit } g, \rho_W \neq 0 \right.$$

$$\Rightarrow z_W = l \frac{\rho_E}{\rho_W}$$

- c) Globale Massenbilanz um die gesamte Wassermasse, flüssig oder eisförmig, im Glas ergibt für die Initialzeitpunkt t_0 und Zeitpunkt t_1 , wenn der Eiswürfel komplett geschmolzen ist:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \left| \int_{t_0}^{t_1} dt \right.$$

$$\Rightarrow m_1 - m_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = m_0$$

$$\Rightarrow \rho_W V_{W,1} = \rho_W V_{W,0} + \rho_E V_E$$

Mit den initialen Volumina für das flüssige Wasser $V_{W,0} = Ah_0 - z_W l^2$ und das eisförmige Wasser $V_E = l^3$ folgt:

$$\Rightarrow \rho_W Ah_1 = \rho_W (Ah_0 - z_W l^2) + \rho_E l^3 \quad \left| \text{mit } \rho_W, A \neq 0 \right.$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{\rho_W (Ah_0 - z_W l^2) + \rho_E l^3}{\rho_W A}$$

$$\Rightarrow h_1 = h_0 - \frac{z_W l^2}{A} + \frac{\rho_E l^3}{\rho_W A} \quad \left| \text{mit } z_W = l \frac{\rho_E}{\rho_W} \right.$$

$$\Rightarrow h_1 = h_0 - \frac{l \frac{\rho_E}{\rho_W} l^2}{A} + \frac{\rho_E l^3}{\rho_W A}$$

$$\Rightarrow h_1 = h_0$$

- d) Begründung: Insofern der Auftrieb in der Luft nicht zu vernachlässigen ist, so verdrängt der Eiswürfel, um zu schwimmen, weniger flüssiges Wasser als für den Fall, wenn der Auftrieb in der Luft zu vernachlässigen ist, also $z_W \downarrow$. Laut Aufgabenstellung bleibt aber der Behälter nach wie vor mit der Füllhöhe h_0 gefüllt. Der Teil des Volumens des Eiswürfels, welcher den Auftrieb in der Luft erfährt, wird beim Schmelzen zu einem Anstieg des Fluidspiegels sorgen, da dieser Teil initial kein flüssiges Wasser verdrängt hat.

Alternativ kann folgende zuvor hergeleitete Formel verwendet werden:

$$h_1 = \frac{\rho_W (Ah_0 - z_W l^2) + \rho_E l^3}{\rho_W A}$$

$$\Rightarrow h_1 \downarrow \text{ für } z_W \uparrow \text{ und } \rho_W, \rho_E, l = \text{const}$$

Folgerung:

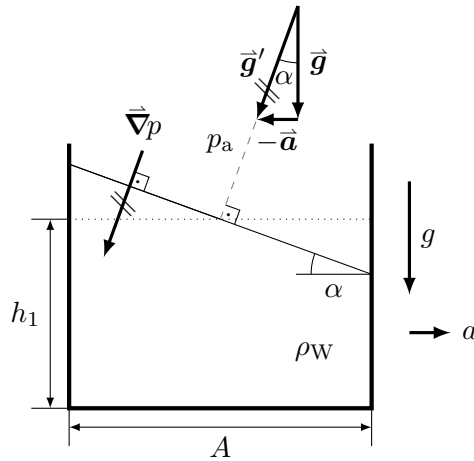
$$h_1^{\text{mit Luftauftrieb}} > h_1^{\text{kein Luftauftrieb}} = h_0$$

- e) **Ausführliche Begründung**: Fluidstatische lokale Impulsbilanz mit translatorischer Beschleunigung \vec{a} als Scheinkraft

$$\vec{\nabla} p = \vec{f}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho (\vec{g} - \vec{a}) \quad \left| \text{modifizierte Gravitation } \vec{g}' = \vec{g} - \vec{a} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho \vec{g}' = \text{const} \quad \left| \text{da } \vec{g}, \vec{a} = \text{const} \right.$$



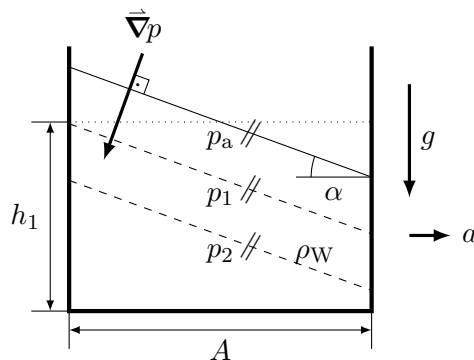
Kurzgefasst: Die Fluidoberfläche muss senkrecht zu der Vektorsumme der Gravitation und der gleichmäßigen Beschleunigung also der modifizierten Gravitation $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ sein.

Der Neigungswinkel der Fluidoberfläche gegenüber der Vertikalen unter gemeinsamen Einfluss der Gravitationsbeschleunigung \vec{g} mit Betrag $g \neq 0$ und der Beschleunigung \vec{a} mit Betrag $a > 0$ senkrecht zur Gravitationsbeschleunigung ergibt sich damit zu:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{g}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

- f) Für die Zeitpunkte $t \geq t_2$ ist der Behälter gleichmäßig beschleunigt und die Wasseroberfläche stellt die Isobare für den Umgebungsdruck p_a dar. Der Gradient des statischen Drucks ist nach der lokalen Impulsbilanz senkrecht zur Oberfläche, so dass Flächen im Wasser parallel zur um den Winkel α geneigten Wasseroberfläche weitere Isobaren darstellen mit $p_i > p_a$. Nachfolgend sind exemplarisch zwei dieser Isobaren mit $p_a < p_1 < p_2$ skizziert. Mit steigenden statischen Druckwert p_i liegt die Isobaren tiefer unterhalb der Wasseroberfläche.



Kriterien an die Skizze:

- Wasseroberfläche ist die Isobare für p_a
- Alle Isobaren sind parallel zur Wasseroberfläche
- Die Isobare zu p_a liegt über der von p_1 und die von p_1 über p_2
- Richtung des Druckgradientens $\vec{\nabla}p$

- b) Der geringste Druck wird im Rohrbogen auftreten, da dort sowohl der im Rohr gleichbleibende kinetische Anteil als auch der vollständige geodätische Anteil vorliegen, ohne dass bereits Energie durch die Rotation zugeführt wurde. Im Grenzfall entspricht der Druck bei 3 genau dem Dampfdruck p_D , also $p_3 = p_D$, bei maximaler Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_{\max}$. Auf Grund der zu vernachlässigenden Krümmung des Rohrbogens gegenüber der Abmaße H und R gilt dort $r_2 = r_3 = 0$ und die Punkte 2 und 3 fallen zusammen. Insofern bei 3, wo der geringste statische Druck p_{\min} herrscht, der Dampfdruck nicht unterschritten wird, dann entstehen im ganzen Rohr keine Blasen.

Die stationäre, verlustfreie Bernoulli-Gleichung von Punkt 3 bis zum scharfkantigen Auslass bei vollständig geöffneter Klappe bei Punkt 4 unter Berücksichtigung der Scheinkräfte auf Grund der Rotation liefert:

$$p_3 + \rho g z_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 - \frac{\rho}{2} \omega_3^2 r_3^2 = p_4 + \rho g z_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2 - \frac{\rho}{2} \omega_4^2 r_4^2$$

Alternativ mit Hinweis aus der Aufgabenstellung: Quadratischer Term in der Bernoulli-Gleichung als Energiezufuhr auf Grund der Rotation:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad \Big| \int_3^4 dr$$

$$\Rightarrow \Delta p_{\text{rot}} = \Delta p_{3,4}^+ = \frac{\rho}{2} \omega_4^2 r_4^2 - \frac{\rho}{2} \omega_3^2 r_3^2$$

Annahmen laut Aufgabenstellung und abgeleitete Informationen einarbeiten:

- Dampfdruck p_D wird bei 3 mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_3 = \omega_4 = \omega_{\max}$ erreicht:

$$p_3 = p_D$$

- Scharfkantiger Auslass bei 4: $p_4 = p_a$
- Konvention: Höhennullniveau bei 0, so dass $z_3 = z_4 = H$
- Ausgebildete Strömung im Rohr: Konti mit $A = \text{const}_s$

$$v_3 = v_4 = v$$

- Vernachlässigbare Krümmung des Rohrbogens: $r_2 = r_3 = 0$, aber $r_4 = R$

Somit folgt:

$$p_D + \rho g H + \cancel{\frac{\rho}{2} v^2} - \frac{\rho}{2} \omega_{\max}^2 \cancel{r_3^2} = p_a + \rho g H + \cancel{\frac{\rho}{2} v^2} - \frac{\rho}{2} \omega_{\max}^2 r_4^2$$

$$\Rightarrow p_D = p_a - \frac{\rho}{2} \omega_{\max}^2 r_4^2 \quad \Big| \text{mit } R, \rho > 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\max} = \pm \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_a - p_D)} \quad \Big| \text{mit } \omega_{\max} > 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\max} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_a - p_D)}$$

- c) Instationärer, verlustfreier Bernoulli von Punkt 0, der Wasseroberfläche im Becken, durch das Rohr bis zum scharfkantigen Auslass bei 4 bei vollständig geöffneter Klappe unter Berücksichtigung der Scheinkräfte auf Grund der Rotation liefert:

$$p_0 + \rho g z_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega_0^2 r_3^2 = p_4 + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega_4^2 r_4^2 + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Annahmen laut Aufgabenstellung und abgeleitete Informationen:

- Offenes großes ruhendes Becken: $p_0 = p_a, v_0 = 0, \omega_0 = 0$
- Scharfkantiger Auslass bei 4: $p_4 = p_a, r_4 = R$
- Konvention: Höhennullniveau bei 0, so dass $z_0 = 0$ und $z_4 = H$
- Ausgebildete Strömung im Rohr $v_4 = v$
- Mit ω drehendes Rohr: $\omega_4 = \omega$
- Keine Strömungsverluste: $\Delta p_{0,4}^- = 0$

Somit folgt:

$$p_a = p_a + \rho g H + \rho \frac{v^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad \forall t_0 \leq t$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 - \rho g H = \rho \frac{v^2}{2} + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad \forall t_0 \leq t$$

Die instationäre Bernoulli-Gleichung gilt für alle betrachteten Zeitpunkte der Aufgabenstellung. Zum Zeitpunkt t_0 öffnet sich die Klappe und die Geschwindigkeit im Rohr ist $v(t_0) = 0$.

Hiermit folgt für die instationäre Bernoulli-Gleichung zum Zeitpunkt t_0 :

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 - \rho g H = \rho \frac{(v(t_0))^2}{2} + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t}(t_0) ds$$

Damit durch die Rotation des Rohrs Wasser beim Öffnen der Klappe gefördert wird, muss das Fluid insgesamt entlang der Stromlinie lokal beschleunigt werden, also $\frac{\partial v}{\partial t}(t_0) \geq 0 \quad \forall s_0 \leq s \leq s_4$, so dass für den instationären Term folgende Bedingung erfüllt sein muss:

$$\rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t}(t_0) ds \geq 0$$

Somit gilt folgender Zusammenhang für die Winkelgeschwindigkeit zum Fördern des Fluids zum Zeitpunkt t_0 :

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 - \rho g H \geq 0$$

Die minimale Winkelgeschwindigkeit ω_{\min} zum Fördern des Fluids zum Zeitpunkt t_0 , stellt sich bei Gleichheit der obigen Gleichung ein.

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} \omega_{\min}^2 R^2 - \rho g H = 0 \quad | \text{ mit } R, \rho > 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\min} = \pm \frac{1}{R} \sqrt{2gH} \quad | \text{ mit } \omega_{\min} > 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\min} = \frac{1}{R} \sqrt{2gH}$$

d) Instationärer, verlustfreier Bernoulli von Punkt 0 bis Punkt 4 wie in der Teilaufgabe zuvor mit $p_0 = p_a$:

$$\underbrace{p_0}_{p_a} = p_a + \rho g H + \rho \frac{v^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad \forall t_0 \leq t$$

$$\Rightarrow 0 = \rho g H + \rho \frac{v^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 + \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad \forall t_0 \leq t$$

Der instationäre Term kann wie folgt aufgeteilt werden:

$$\rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \underbrace{\rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds}_{\approx 0, \text{ im Becken}} + \underbrace{\rho \int_1^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds}_{\text{im Rohr}}$$

Das Rohr ist sehr lang und die lokale Beschleunigung im Becken ist kleiner als diejenige im Rohr, so dass das erste Integral gegenüber dem zweiten Integral vernachlässigt wird.

$$\begin{aligned} \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds &\approx \underbrace{\rho \int_1^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds}_{\text{im Rohr}} && | \text{ ausgebildet im Rohr } v(t) = \text{const}_s \\ \Rightarrow \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds &\approx \rho \int_1^4 \frac{dv}{dt} ds = \rho \frac{dv}{dt} \int_1^4 ds && | \text{ Krümmung vernachlässigt } \int_1^4 ds \approx H + R \\ \Rightarrow \rho \int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds &\approx \rho \frac{dv}{dt} (H + R) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \rho g H + \rho \frac{v^2}{2} - \frac{\rho}{2} \omega^2 R^2 + \rho \frac{dv}{dt} (H + R) && \forall t_0 \leq t \text{ mit } \rho \neq 0 \\ \Rightarrow 0 &= g H + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} \omega^2 R^2 + \frac{dv}{dt} (H + R) && \forall t_0 \leq t \end{aligned}$$

Die stationäre Austrittsgeschwindigkeit $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v$ erhält man mit der Bedingung $\frac{dv}{dt} = 0$ zu:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= g H + \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{1}{2} \omega^2 R^2 && \text{für } t \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \frac{v_\infty^2}{2} &= \frac{1}{2} \omega^2 R^2 - g H \\ \Rightarrow v_\infty &= \pm \sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH} && \text{mit } v_\infty > 0 \\ \Rightarrow v_\infty &= \sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH} \end{aligned}$$

Damit lässt sich die DGL wie folgt umschreiben:

$$\Rightarrow 0 = \frac{v^2}{2} - \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{dv}{dt} (H + R) \quad \forall t_0 \leq t$$

Hierzu gehören noch die folgenden Anfangsbedingung und Forderung laut Aufgabenstellung:

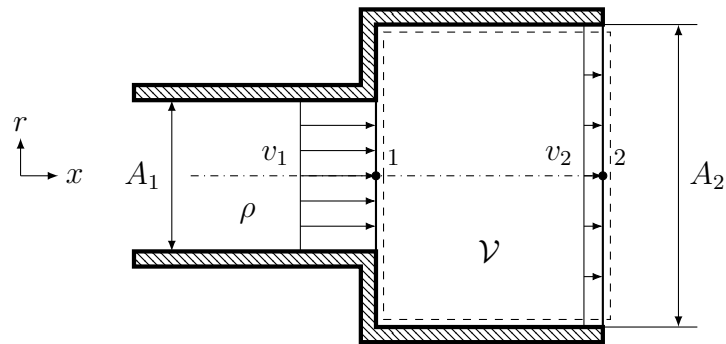
$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} & \quad v(t_0) \stackrel{!}{=} 0 \\ \text{Forderung:} & \quad v(t_0 + \Delta t) \stackrel{!}{=} \frac{v_\infty}{2} \end{aligned}$$

Nach Trennung der Variablen und anschließender Integration ergibt sich mit $H, R, v_\infty = \text{const}$ und dem Integral-Hinweis für $|x| = |\bar{v}| < a = v_\infty$:

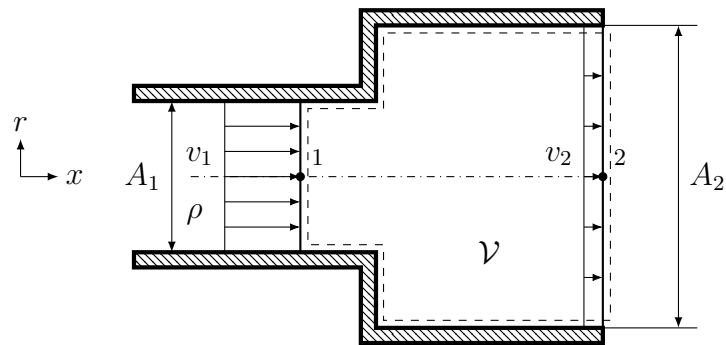
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2(H + R)} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt &= \int_{v(t_0)=0}^{v(t_0 + \Delta t) = \frac{v_\infty}{2}} \frac{d\bar{v}}{v_\infty^2 - \bar{v}^2} && | \text{ Integral-Hinweis} \\ \Rightarrow \frac{\Delta t}{2(H + R)} &= \frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty + \frac{v_\infty}{2}}{v_\infty - \frac{v_\infty}{2}} \right) \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{H + R}{v_\infty} \ln(3) && | v_\infty \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{H + R}{\sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH}} \ln(3) \end{aligned}$$

3. Aufgabe

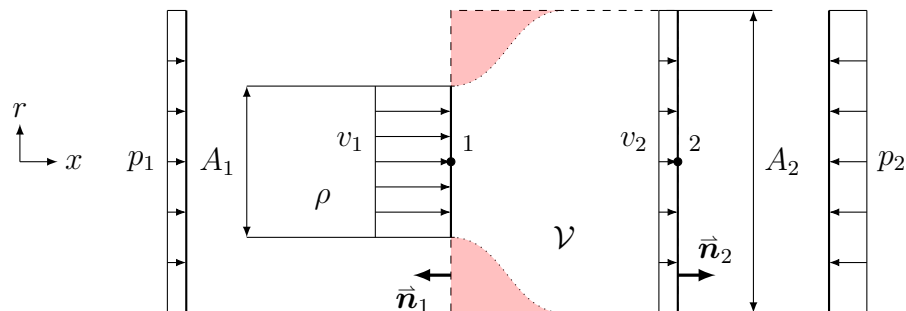
- a) Für den Impulssatz wird folgendes gestrichelt gekennzeichnetes Kontrollvolumen um das Fluid im Bereich der Querschnittserweiterung verwendet.



Alternatives Kontrollvolumen: Da angenommen wird, dass keine Wandhaftung/äußere Reibung vorhanden ist, ist das folgende Kontrollvolumen alternativ möglich.



Das Kontrollvolumen und die Strömungsgrößen sind nachfolgend noch einmal gesondert skizziert.



Da die Stromlinien beim Einlass in Punkt 1 und beim Auslass parallel zueinander verlaufen und im Totwassergebiets (rot) ober- und unterhalb des scharfkantigen Einlasses bei Punkt 1 ruht ($\vec{v} = \vec{0}$), fällt der radiale Druckgradient am Einlass und beim Auslass für das vorliegende Fluid zu Null weg, also gilt $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{1,2} = 0$ bzw. $p_1 = \text{const}_r$ und $p_2 = \text{const}_r$.

Globale Impulsbilanz für das Fluid im Kontrollvolumen: Bedenke, dass Volumenkräfte wie Gravitation und äußere Reibung zu vernachlässigen sind.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} \, dV}_{=\vec{0}, \text{ da stationär}} + \oint_{\partial V} \rho \vec{v} (\vec{v}_{\text{rel}} \cdot d\vec{A}) = \underbrace{\int_V \vec{f} \, dV}_{=\vec{0}, \text{ da keine Volumenkräfte}} + \oint_{\partial V} -p \, d\vec{A} + \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{\tau} \cdot d\vec{A}}_{=\vec{0}, \text{ da keine äußere Reibung}}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \rho \vec{v} (\vec{v}_{\text{rel}} \cdot d\vec{A}) = \oint_{\partial V} -p \, d\vec{A}$$

In x -Richtung und für ein ruhendes Kontrollvolumen, also $\vec{v}_{\partial V} = \vec{0}$ und somit $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_{\partial V} = \vec{v}$, ergibt sich:

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \rho (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA = \oint_{\partial V} -p (\vec{e}_x \cdot \vec{n}) \, dA$$

Da die Geschwindigkeits- und Druckfelder bei den Punkten 1 und 2 homogen, also konstant über die Querschnittsfläche A_1 und A_2 sind (Blockprofile), erhält man:

$$\Rightarrow \underbrace{-\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{p_1 A_2 - p_2 A_2}_{\text{Druckkräfte}}$$

Stationäre globale Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung) für das gewählte Kontrollvolumen \mathcal{V} liefert:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \left| \text{ mit } v_1, A_2 > 0 \right.$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Eingesetzt in die Impulsbilanz in x -Richtung und umgeformt nach der gesuchten Differenz der statischen Drücke $p_1 - p_2$ ergibt:

$$\Rightarrow -\rho v_2 A_2 (v_1 - v_2) = (p_1 - p_2) A_2 \quad \left| \text{ mit } A_2 > 0 \right.$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = -\rho v_2 (v_1 - v_2) \quad \left| \text{ mit } v_1 > 0 \right.$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = -\rho v_1^2 \frac{v_2}{v_1} \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right) \quad \left| \text{ mit Konti} \right.$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = -\rho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)$$

Mit diesem Ergebnis kann nun entschieden werden, wie der statische Druck sich durch die Querschnittserweiterung stromab verändert. Laut Aufgabenstellung gilt $0 < A_1 < A_2$ und ohnehin $\rho, v_1 > 0$:

$$p_1 - p_2 = - \underbrace{\rho v_1^2}_{>0} \underbrace{\frac{A_1}{A_2}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)}_{>0} < 0$$

$$\Rightarrow p_1 < p_2$$

Somit wird der statische Druck vom Einlass bis zum Auslass erhöht. Anders interpretiert entsteht durch den Stoß von schnellen Teilchen auf langsamere ein Druckanstieg.

Hinweis: Die statische Druckdifferenz ist nur Teil aber nicht der gesamte Druckverlust.

$$p_1 - p_2 \neq \Delta p_{1,2}^-$$

- b) Auch bei einer unstetigen Querschnittserweiterung existiert eine Stromlinie zwischen den Ebenen senkrecht zur x -Achse je in den Punkten 1 und 2. Entlang der Stromlinie auf der Mittellinie wird nun folgende stationäre $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, arbeitsfreie $\Delta p^+ = 0$ Bernoulli-Gleichung ohne Scheinkräfte $\vec{a} = 0$, $\vec{\omega} = \vec{0}$ und ohne Gravitation $g = 0$ aufgestellt:

$$1 \rightarrow 2: \quad p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \Delta p_{1,2}^+ = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_{1,2}^- + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow \Delta p_{1,2}^- = p_1 - p_2 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

Nach Einsetzen des Zwischenergebnisses für die statischen Druckdifferenz, also $p_1 - p_2 = -\rho v_2 (v_1 - v_2)$, aus der Impulsbilanz in x -Richtung ergibt sich:

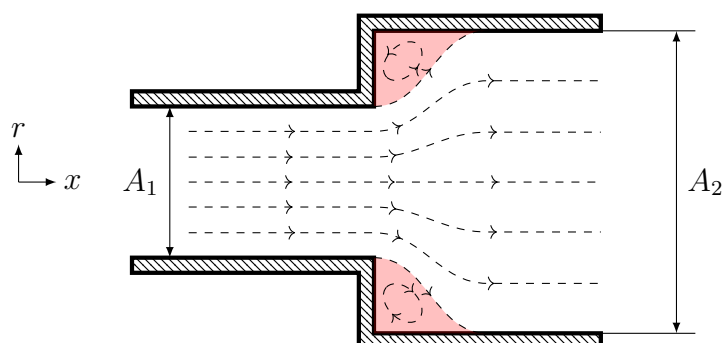
$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= -\rho v_2 (v_1 - v_2) + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) && | \text{Einsetzen von } p_1 - p_2 \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= -\rho v_2 v_1 + \rho v_2^2 + \frac{\rho}{2} v_1^2 - \frac{\rho}{2} v_2^2 && | \text{Zusammenfassen} \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} v_1^2 - \rho v_1 v_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 && \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2) && | \text{2. Binom} \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2 && | \text{mit } v_1 \neq 0 \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 && | \text{mit Konti} \\ \Rightarrow \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 && \\ &> 0 \quad \text{für } 0 < A_1 < A_2 \text{ und } \rho, v_1^2 > 0 && \end{aligned}$$

Der so bestimmte Druckverlustterm ist positiv und somit handelt es sich tatsächlich um einen Druckverlust auf Grund der unstetigen Querschnittserweiterung. Dieser Druckverlust $\Delta p_{1,2}^-$ wird auch Borda-Carnotscher Stoßverlust genannt. Den Verlustbeiwert ζ erhält man über einen Koeffizientenvergleich mit dessen Definitionsgleichung.

$$\begin{aligned} \Delta p_{1,2}^- &= \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \Delta p_{1,2}^- = \zeta \frac{\rho}{2} v_1^2 && | \text{mit } \rho, v_1 > 0 \\ \Rightarrow \zeta &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 && \\ &> 0 \quad \text{für } 0 < A_1 < A_2 && \end{aligned}$$

Interpretation: Dieser Druckverlust entsteht durch die Verwirbelung und Vermischung des Fluids mit dem bereits im größeren Querschnitt befindlichen Fluid, auch innere Reibung genannt. Bei der Herleitung ist die äußere Reibung, also Reibungsverluste auf Grund der Reibung zwischen Fluid und Wand vernachlässigt worden (Blockprofil-Annahme).

- c) Skizze der Stromlinien und der Ablöse- und Rezirkulationsgebiete

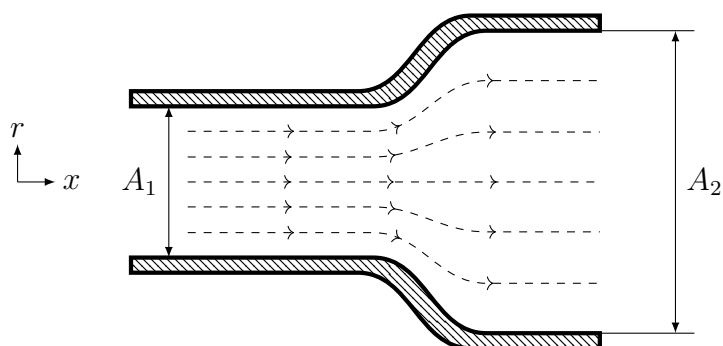


Die Druckverluste finden vor allem im flächig markierten Bereich der Ablösung und Rezirkulation auf Grund der Verwirbelungen und der inneren Reibung im Fluid statt.

Kriterien an die Skizze:

- Stromlinien sind parallel bei Querschnitt 1 und 2.
- Stromlinien bilden eine Stromröhre, die sich von Querschnitt 1 bis 2 aufweitet.
- Die Ablösung und Rezirkulation findet vor allem in den scharfkantigen Ecken des unstetigen Querschnittssprungs statt. Richtung der Rezirkulation sollte mit den Stromlinien zusammenpassen.

d) Die Verluste können verringert werden, indem die Geometrie so verändert wird, dass die Strömung der Geometrie glatter folgen kann (gut gerundeter Diffusor), um Ablösungs- und Rezirkulationsgebiete zu verringern oder zu verhindern. Statt eines unstetigen Sprungs kann im einfachen Fall ein linearer Verlauf (Rampe) von Querschnitt 1 bis 2 verwendet werden.



Kriterien an die Skizze:

- Gleicher Einlass- und Auslassquerschnitt A_1 und A_2 mit parallelen Stromlinien
- Glatterer Übergang (linear oder gekrümmt) zwischen den beiden Querschnitten 1 und 2, so dass die Rezirkulationsgebiete kleiner ausfallen.

Notwendig: Achsenbeschriftung, Hauptwinkelhalbierende, Energiehöhenlinie

1. Ausgangszustand: Unterkritische Strömung $Fr_1 < 1$
2. Unterkritische Strömung mit $Fr_2 < 1$, $H_1 = H_2 + y_2$
3. Unterkritische Strömung mit $Fr_3 < 1$, $H_1 = H_3$
4. Kritischer Zustand wird bei $y_4 = h_0 = y_{max}$ erreicht, bei Übergang in schießenden Zustand $Fr_4 = 1$
5. Überkritische Strömung (kleine Spiegelhöhe, hohe Geschwindigkeit) $Fr_5 > 1$ Bis hierhin gibt es keinen Energieverlust, d.h. $H_1 = H_4 + y_{max} = H_5$
6. Energieverlust durch Wechselsprung: Übergang überkritisch zu unterkritisch $Fr_6 < 1$ und $H_6 < H_1$

b) Gesuchte Größe: H_V

Da zwischen Zustand 4 und 5 keine Energiehöhenverluste auftreten, kann die Bernoulli-Gleichung an der Fluidoberfläche ohne unbekanntem Energiehöhenverlust angewendet werden, denn es gilt $\Delta H = 0$ zwischen 4 und 5.

$$\text{Bernoulli } 4 \rightarrow 5 = V: \quad H_4 + y_4 = H_V + y_V$$

Da die Strömung als stationär ist und dabei ein energieminimaler Zustand angestrebt wird, wird der kritische Zustand bei 4 erreicht, da dort die maximale Sohlenhöhe $y_w = y_{gr}$ vorherrscht. Somit gilt für die Sohlenhöhen:

$$y_V = 0 \quad \text{und} \quad y_4 = h_0$$

Die zeitliche Entwicklung hin zu dem energieminimalen Zustand kann mit der idealen offenen Gerinneströmung in SM1 nicht untersucht werden, deswegen wird der Zustand $t \gg t_0$ betrachtet. Die minimale Energiehöhe H_{min} ist die Energiehöhe bei der Grenztiefe z_{gr} , also $H_{min} = H(z_{gr})$:

$$H_4 \stackrel{!}{=} H_{min} = H_{gr} = z_{gr} + \frac{v_{gr}^2}{2g}$$

Aus der stationären Kontinuitätsgleichung folgt:

$$v_{gr} = \frac{\dot{V}}{z_{gr}B}$$

Infolgedessen lässt sich H_4 wie folgt schreiben:

$$\Rightarrow H_4 = H_{min} = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gz_{gr}^2B^2}$$

Mit $z_{gr} = \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ aus dem Hinweis der Aufgabenstellung und mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\dot{V}}{B} = v_0h_0$, um die Unbekannten \dot{V} und B zu eliminieren, folgt insgesamt dann:

$$\Rightarrow H_V = H_{min} + h_0$$

$$\Rightarrow H_V = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gz_{gr}^2B^2} + h_0 \quad \left| \text{mit } z_{gr} = \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right.$$

$$\Rightarrow H_V = \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{1-\frac{2}{3}} + h_0 \quad \left| \text{mit } \frac{\dot{V}}{B} = v_0h_0\right.$$

$$\Rightarrow H_V = \frac{3}{2} \left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} + h_0$$

- c) Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung über den Wechselsprung hinweg kann mit Hilfe des Hinweises zum Energiehöhenverlust ΔH die Energiehöhe H_N nach dem Wechselsprung bestimmt werden:

$$\text{Bernoulli } 5 = V \rightarrow 6 = N: \quad \underbrace{H_V + y_V}_{=H_V^{\text{tot}}} = \underbrace{H_N + y_N}_{=H_N^{\text{tot}}} + \Delta H$$

Mit $y_V = y_N = 0$ folgt somit:

$$\Rightarrow H_N = H_V - \Delta H \quad \text{mit } H_V = \frac{3}{2} \left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} + h_0 \quad \text{oder} \quad z_V + \frac{v_0^2 h_0^2}{2g z_V^2}$$

$$\Rightarrow H_N = \underbrace{\frac{3}{2} \left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} + h_0}_{=\text{const}} - \Delta H$$

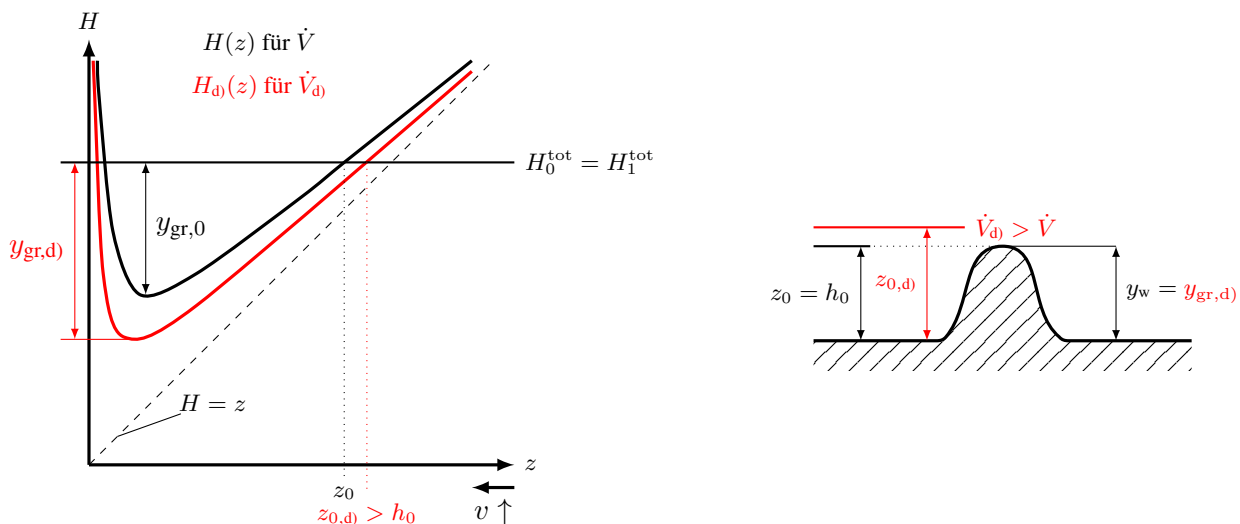
Tipp: Da die Energieverlusthöhe eine Funktion von z_V, z_N ist, ist auch H_N eine Funktion von z_V, z_N .

$$\Delta H = \frac{(z_N - z_V)^3}{4z_V z_N} \geq 0$$

- d) Bei gleicher totaler Energiehöhe $H_0^{\text{tot}} = H_1^{\text{tot}}$ muss sich die Strömung ebenfalls aufstauen. Dafür muss der Volumenstrom \dot{V} soweit sinken gegenüber dem Fall ohne Hindernisse, bis $y_w = y_{gr} > y_{gr,0}$ gilt und das zweite Hindernis stationär überströmt wird.

$$\dot{V}_d < \dot{V}_{a-c)}$$

Mittels der Definition für die Energiehöhe $H(z) = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2 z^2}$ ergibt sich folgendes Energiehöhendia-gramm für den verringerten Volumenstrom \dot{V} :

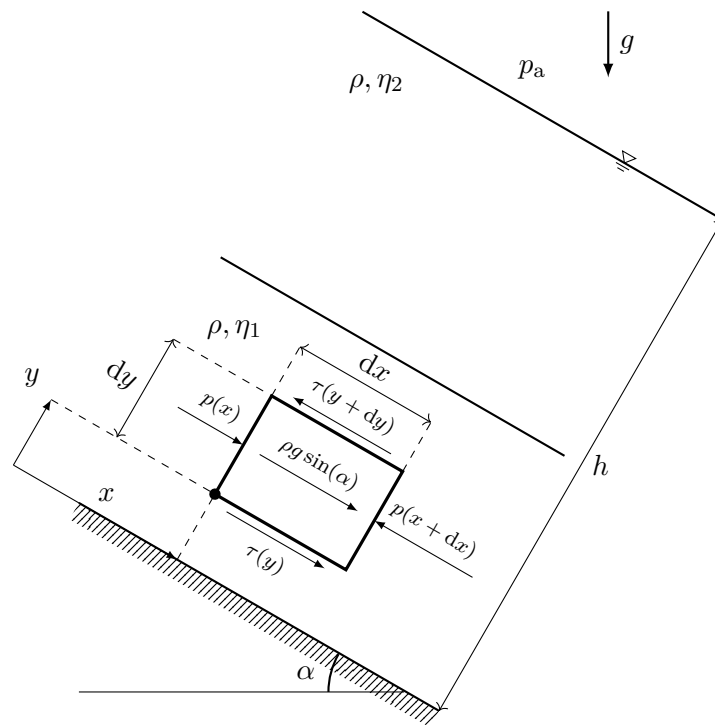


Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsenbeschriftung, Hauptwinkelhalbierende, Energiehöhenlinien
- Energiehöhe $H_d(z)$ unterhalb von $H(z)$ für $\dot{V}_d > \dot{V}$
- Zusatz: Das Minimum der Energiehöhe $H_d(z)$ ist links vom Minimum von $H(z)$
- Zusatz: Die rechte Grafik dient zur weiteren Illustration.

5. Aufgabe

- a) Skizze des differentiellen Volumenelements zur Herleitung der Differentialgleichung mit Annahme der Schubspannungen nach negativer Konvention:



Kriterien an die Skizze:

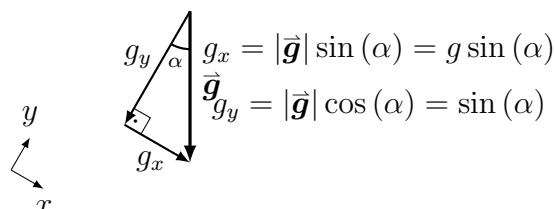
- Notwendig: Achsen mit Beschriftung
- Kartesisches differentielles Element mit Ausdehnung dx und dy in richtiger Orientierung
- Relevante Kräfte: Schubspannungen und Gravitation

Hinweis: Hierbei kann das differentielle Element wahlweise in der ersten unteren Fluidschicht oder in der oberen zweiten Fluidschicht gezeichnet werden, da auf Grund der gleichen Dichte $\rho = \rho_1 = \rho_2$ der Fluide, sich die gleiche Differentialgleichung für die Schubspannung τ_i in beiden fluiden Phasen ergibt, also $i \in \{1, 2\}$.

Stationärer Impulssatz bzw. Impulsbilanz am kartesischen differentiellen Element in x -Richtung: Die konvektiven Terme auf der linken Seite fallen auf Grund der ausgebildeten laminaren Strömung zu Null weg. Weiterhin sind somit die Schubspannung $\tau(y)$ und die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung $u(y)$ alleinige Funktionen in der wandnormalen Koordinate y .

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz \\
 &+ p(x) dy dz - p(x + dx) dy dz \\
 &+ \tau_i(y) dx dz - \tau_i(y + dy) dx dz
 \end{aligned}$$

Die x -Komponente der Erdbeschleunigung ergibt sich dabei aus der Vektorzerlegung der Gravitationsbeschleunigung.



Auf Grund der freien Oberfläche und der konstanten Dicken beider Fluidschichten in Hauptströmungsrichtung ist der Druckgradient in x -Richtung Null, plausibel mittels Bernoulli-Gleichung und differentieller Impulsbilanz in y -Richtung, sodass sich die Druckterme in der Impulsbilanz in x -Richtung am differentiellen Element gegenseitig aufheben:

$$p(x) dy dz - p(x + dx) dy dz = 0$$

Mit der Taylor-Reihenentwicklung am Entwicklungspunkt mit den Koordinaten (x, y, z) , welcher als Punkt in der obigen Skizze gekennzeichnet ist, gilt:

$$\tau_i(y + dy) = \tau_i(y) + d\tau_i = \tau_i(y) + \frac{d\tau_i}{dy} dy$$

Somit ergibt sich für die Impulsbilanz am differentiellen Element:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz + \tau_i(y) dx dz - \left[\tau_i(y) + \frac{d\tau_i}{dy} dy \right] dx dz \\ \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz - \frac{d\tau_i}{dy} dx dy dz \\ \Rightarrow 0 &= \left[\rho g \sin(\alpha) - \frac{d\tau_i}{dy} \right] dx dy dz \quad \text{wobei } dx dy dz \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{d\tau_i}{dy} &= \rho g \sin(\alpha) \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

b) Die beiden Randbedingungen in der Phasengrenze zwischen beiden Fluiden bei $y = \frac{h}{2}$, die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung erforderlich sind, lauten:

- Haftung der beiden Schichten (Phasenhaftung):

$$u_1 \left(y = \frac{h}{2} \right) \stackrel{!}{=} u_2 \left(y = \frac{h}{2} \right) \quad (\text{eine Dirichlet-Randbedingung})$$

- "Kräftegleichgewicht"/Impulsbilanz in der Phasengrenze (Phasengleichgewicht):

$$\tau_1 \left(y = \frac{h}{2} \right) \stackrel{!}{=} \tau_2 \left(y = \frac{h}{2} \right)$$

oder direkt inklusive der mechanischen Stoffmodelle für zwei Newtonsche Fluide

$$\Rightarrow \eta_1 \frac{du_1}{dy} \left(y = \frac{h}{2} \right) \stackrel{!}{=} \eta_2 \frac{du_2}{dy} \left(y = \frac{h}{2} \right) \quad (\text{eine Neumann-Randbedingung})$$

c) Erst nach Einsetzen des mechanischen Stoffmodells für die unterschiedlichen Fluide unterscheiden sich die Differentialgleichungen zur Beschreibung der beiden Fluidschichten. In dieser Aufgabe sind beide Fluide von Newtonscher Art, so dass das mechanische Stoffmodell nach negativer Konvention wie folgt für die laminare ausgebildete Strömung lautet:

$$\tau_i = -\eta_i \frac{du_i}{dy} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

Eingesetzt in die zuvor hergeleitete DGL für die Schubspannung τ_i ergibt sich mit $\eta_i > 0$ die DGL für die Geschwindigkeit u_i :

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_i} = \text{const} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

Erste unbestimmte Integration liefert für beide fluide Phasen:

$$\begin{aligned} \text{Fluid 1:} \quad & \frac{du_1}{dy}(y) = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} y + A_1 && \text{für } 0 \leq y < \frac{h}{2} \\ \text{Fluid 2:} \quad & \frac{du_2}{dy}(y) = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} y + A_2 && \text{für } \frac{h}{2} \leq y \leq h \end{aligned}$$

Zweite unbestimmte Integration liefert für beide fluide Phasen:

$$\begin{aligned} \text{Fluid 1:} \quad u_1(y) &= -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \frac{y^2}{2} + A_1 y + B_1 && \text{für } 0 \leq y < \frac{h}{2} \\ \text{Fluid 2:} \quad u_2(y) &= -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \frac{y^2}{2} + A_2 y + B_2 && \text{für } \frac{h}{2} \leq y \leq h \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen für die Wandhaftung bei $y = 0$ und der freien Oberfläche bei $y = h$ können die ersten beiden Integrationskonstanten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \text{Wandhaftung:} \quad u_1(y = 0) &\stackrel{!}{=} u_w = 0 \\ \text{Freie Oberfläche:} \quad \tau_2(y = h) &= -\eta_2 \frac{du_2}{dy}(y = h) \stackrel{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{\eta_2 \neq 0} \frac{du_2}{dy}(y = h) = 0 \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung für die Wandhaftung ergibt sich die Integrationskonstante B_1 zu:

$$u_1(y = 0) = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \frac{0^2}{2} + A_1 \cdot 0 + B_1 \Rightarrow B_1 = 0$$

Die Randbedingung der freien Oberfläche liefert A_2 :

$$\frac{du_2}{dy}(y = h) = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} h + A_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow A_2 = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} h$$

Damit lautet die bisherige Lösung nach Einsetzen der bestimmten Integrationskonstanten B_1 und A_1 für die Geschwindigkeitsfelder:

$$\begin{aligned} \text{Fluid 1:} \quad u_1(y) &= -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \frac{y^2}{2} + A_1 y \\ \text{Fluid 2:} \quad u_2(y) &= -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \frac{y^2}{2} + \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} h y + B_2 \end{aligned}$$

Mit den beiden Randbedingungen an der Phasengrenze, die in der Teilaufgabe zuvor abgefragt wurden, lassen sich die letzten beiden Integrationskonstanten bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Phasenhaftung:} \quad u_1\left(y = \frac{h}{2}\right) &\stackrel{!}{=} u_2\left(y = \frac{h}{2}\right) \\ \text{Phasengleichgewicht:} \quad \eta_1 \frac{du_1}{dy}\left(y = \frac{h}{2}\right) &\stackrel{!}{=} \eta_2 \frac{du_2}{dy}\left(y = \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung des Phasengleichgewichts bestimmt sich direkt A_1 :

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{du_1}{dy}\left(y = \frac{h}{2}\right) &= -\cancel{\eta_1} \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\cancel{\eta_1}} \frac{h}{2} + \eta_1 A_1 \\ &\stackrel{!}{=} \eta_2 \frac{du_2}{dy}\left(y = \frac{h}{2}\right) = -\cancel{\eta_2} \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\cancel{\eta_2}} \frac{h}{2} + \cancel{\eta_2} \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\cancel{\eta_2}} h = \rho g \sin(\alpha) \frac{h}{2} \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} h \end{aligned}$$

Mit der Randbedingung der Phasenhaftung ergibt sich somit B_2 nach Einsetzen des Ergebnisses von A_1 :

$$\begin{aligned} u_1\left(y = \frac{h}{2}\right) &= -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} h}_{=A_1} \frac{h}{2} = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \frac{3h^2}{8} \\ &\stackrel{!}{=} u_2\left(y = \frac{h}{2}\right) = -\frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} h \frac{h}{2} + B_2 = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \frac{3h^2}{8} + B_2 \\ \Rightarrow B_2 &= \frac{3\rho g \sin(\alpha)}{8} h^2 \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right) \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Ausgehend von der DGL aus a)

$$\frac{d\tau_i}{dy} = \rho g \sin(\alpha) = \text{const} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad \Big| \int dy$$

Erste unbestimmte Integration:

$$\Rightarrow \tau_i = \rho g \sin(\alpha) y + A_i$$

Bereichsweise ausgeschrieben:

$$\text{Fluid 1:} \quad \tau_1(y) = \rho g \sin(\alpha) y + A_1 \quad \text{für } 0 \leq y < \frac{h}{2}$$

$$\text{Fluid 2:} \quad \tau_2(y) = \rho g \sin(\alpha) y + A_2 \quad \text{für } \frac{h}{2} \leq y \leq h$$

Die Randbedingung des mechanischen Phasengleichgewichts fordert die Gleichheit der Schubspannung an der Phasengrenze für beide Bereiche:

$$\tau_1 \left(y = \frac{h}{2} \right) \stackrel{!}{=} \tau_2 \left(y = \frac{h}{2} \right) \Rightarrow A_1 = A_2 = A$$

Die Randbedingung der freien Oberfläche liefert die Integrationskonstante A:

$$\tau_i(y = h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A = -\rho g \sin(\alpha) h$$

Somit ergibt sich auf Grund dessen, dass die Fluide die gleiche Dichte haben, der bereichsunabhängige Schubspannungsverlauf:

$$\tau(y) = \tau_i(y) = \rho g \sin(\alpha) (y - h)$$

Newton-Fluid in beiden Bereichen nach negativer Konvention:

$$\tau_i = -\eta_i \frac{du_i}{dy} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

Damit ergibt sich die DGL für das Geschwindigkeitsfeld:

$$\Rightarrow \frac{du_i}{dy} = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_i} (h - y) \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \quad \Big| \int dy$$

Zweite Integration in beiden Bereichen liefert $u_1(y)$ und $u_2(y)$:

$$\text{Fluid 1:} \quad u_1(y) = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + B_1 \quad \text{für } 0 \leq y < \frac{h}{2}$$

$$\text{Fluid 2:} \quad u_2(y) = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + B_2 \quad \text{für } \frac{h}{2} \leq y \leq h$$

Mit der Randbedingung der Wandhaftung ergibt sich die Integrationskonstante B_1 zu:

$$u_1(y = 0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

Die Randbedingung der Phasenhaftung liefert die Integrationskonstante B_2 :

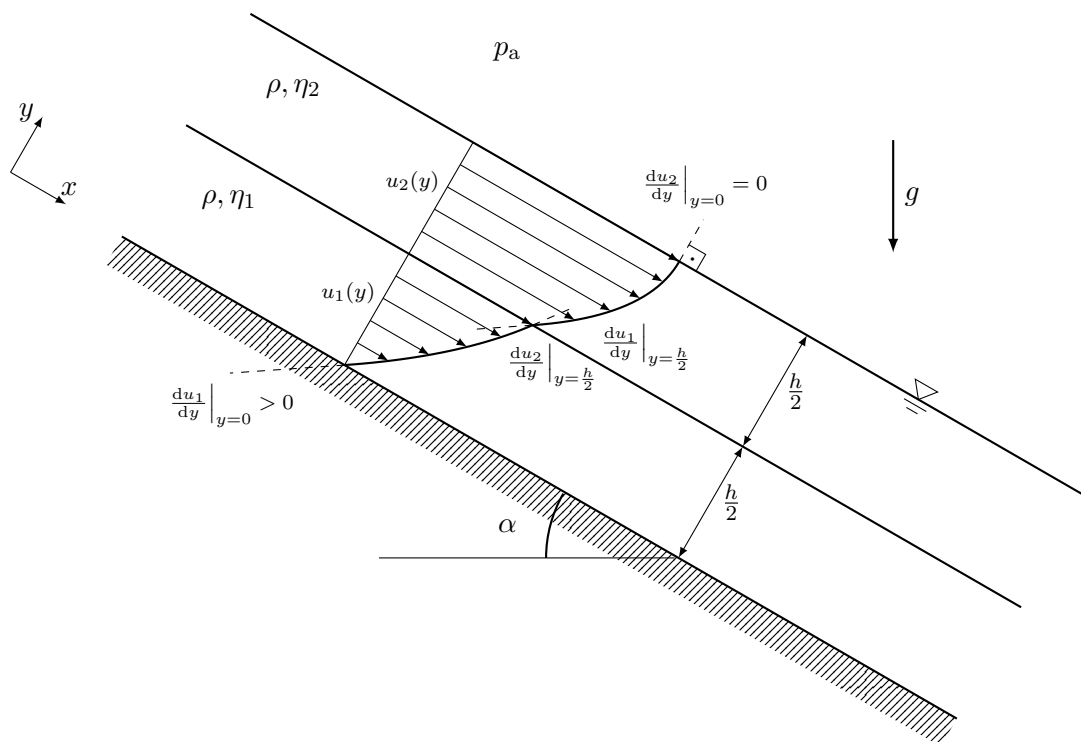
$$u_1 \left(y = \frac{h}{2} \right) \stackrel{!}{=} u_2 \left(y = \frac{h}{2} \right) \Rightarrow B_2 = \frac{3}{8} \rho g \sin(\alpha) h^2 \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right)$$

Somit lautet die Gesamtlösung für das Strömungsgeschwindigkeitsfeld $u(y)$:

$$u(y) = \begin{cases} u_1(y) = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_1} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right), & 0 \leq y < \frac{h}{2} \\ u_2(y) = \frac{\rho g \sin(\alpha)}{\eta_2} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{3\rho g \sin(\alpha)}{8} h^2 \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right), & \frac{h}{2} \leq y \leq h \end{cases}$$

d) Kriterien an die Skizze

- Notwendig: Achsen mit Beschriftungen
- Die Geschwindigkeitsprofile in beiden Fluidphasen sind parabelförmig
- Der Gradient an der freien Oberfläche ist senkrecht zur Oberfläche $\left. \frac{du_2}{dy} \right|_{y=h} = 0$
- An der Phasengrenze sind die Geschwindigkeiten der beiden Phasen gleich, aber die Steigungen stehen entsprechend der Beziehung $\eta_1 > \eta_2$ in folgender Beziehung zueinander: $\left. \frac{du_2}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} < \left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}}$
- Die Geschwindigkeit an der festen Wand ist Null, also $u_1|_{y=0} = 0$ und der Gradient größer als Null, also $\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\rho g h \sin \alpha}{\eta_1} > 0$



Die Geschwindigkeitsgradienten an der Phasengrenze ergeben sich zu:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta_1} (h - y) \Big|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\rho g h \sin \alpha}{2\eta_1}$$

$$\left. \frac{du_2}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta_2} (h - y) \Big|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\rho g h \sin \alpha}{2\eta_2}$$

Für $\eta_1 > \eta_2$ folgt somit qualitativ:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}} < \left. \frac{du_2}{dy} \right|_{y=\frac{h}{2}}$$

6. Aufgabe

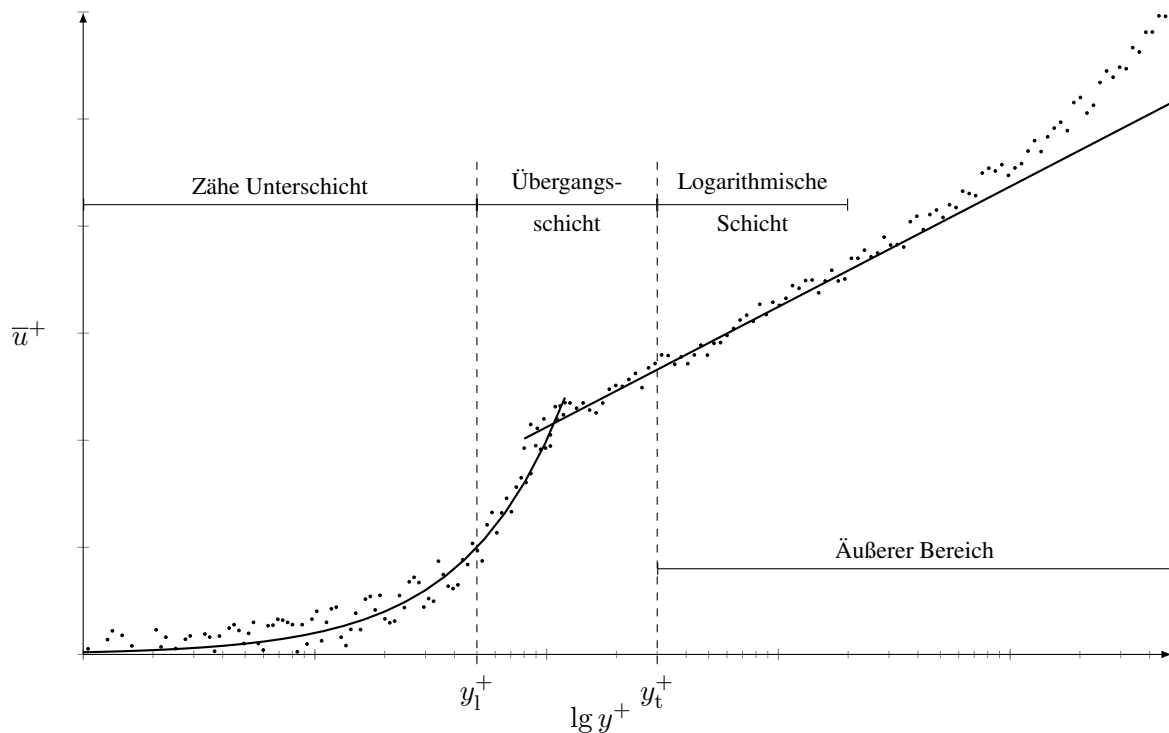
- a) Die zentrale dimensionslose Kennzahl zur Charakterisierung von Strömungsformen ist die Reynolds-Zahl Re , welche wie folgt definiert ist.

$$Re = \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} L_{\text{ref}}}{\eta_{\text{ref}}} = \frac{u_{\text{ref}} L_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref}}} = \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2}{\eta_{\text{ref}} \frac{u_{\text{ref}}}{L_{\text{ref}}}}$$

$$= \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}} = \frac{\text{Konvektiver Term}}{\text{Reibungsterm}}$$

Hinweis: Es sind keine Zahlenwertbereiche zur Klassifizierung der Strömungsformen gefragt. Die Zahlenwerte der kritischen Reynolds-Zahl hängt ohnehin vom konkret vorliegenden Problem ab.

- b) Skizze zum turbulenten bzw. universellen Wandgesetz:



Kriterien an die Skizze:

- Achsenbeschriftung, Bezeichnung der Bereiche
- Linearer Verlauf im wandnahen Bereich für die zähe Unterschicht
- Logarithmischer Verlauf in in der logarithmischen Schicht
- Übergangsschicht dazwischen
- Zahlenwerte sind **nicht** nötig

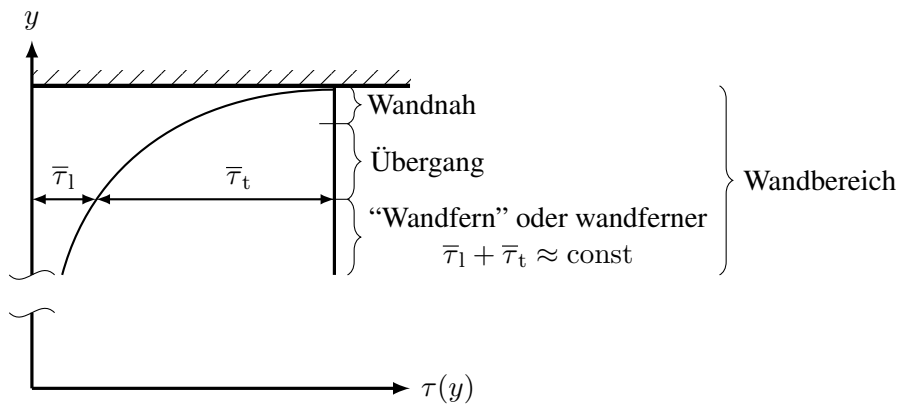
Zusatz: Wenn man das turbulente Wandgesetz wie folgt umschreibt, ergeben sich die zuvor skizzierten Kurven. Auf Grund der halblogarithmischen Darstellung erscheint der lineare Bereich als eine gekrümmte exponentielle Kurve.

$$\bar{u}^+(y^+) = \begin{cases} y^+ = e^{\ln y^+} & \text{für } 0 \leq y^+ \leq y_1^+ \text{ linearer Bereich} \\ - & \text{für } y_1^+ \leq y^+ \leq y_t^+ \text{ Übergangsbereich} \\ \frac{1}{k} \ln y^+ + C^+ & \text{für } y_t^+ \leq y^+ < R^+ \text{ logarithmischer Bereich} \end{cases}$$

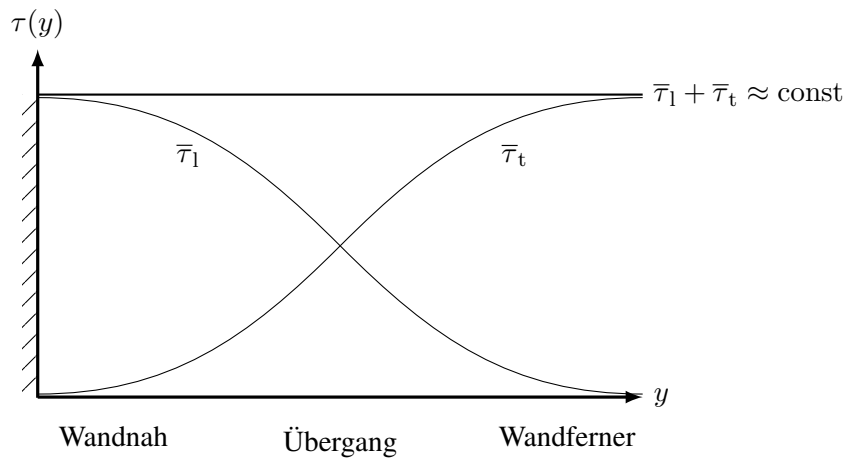
Beispielhafte experimentelle Datenpunkte zum Ermitteln der Konstanten k und C^+ sind im Diagramm mit Punkten gekennzeichnet.

c) Folgende beiden Skizzen sind zulässige Lösungen:

Skizze am Skript angelehnt:



Skizze an der Vorlesung angelehnt:



Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsenbeschriftung
- Summe aus laminarer und turbulenter Schubspannung ist im Wandbereich nahezu konstant, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_l + \bar{\tau}_t \approx \text{const}$
- Im wandnahen Bereich überwiegt der laminare Anteil $\bar{\tau}_l$
- Im Übergangsbereich sind der laminare und turbulente Anteil in ähnlicher Größenordnung
- Im "wandfernen" Bereich überwiegt der turbulente Anteil $\bar{\tau}_t$

d) Stromlinien-Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten mit $dx_S, u(x_S, y_S|t) \neq 0$:

$$u dy_S = v dx_S$$

$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{v(x_S, y_S|t)}{u(x_S, y_S|t)} \stackrel{\text{stationär}}{=} \frac{v(x_S, y_S)}{u(x_S, y_S)}$$

Einsetzen des gegebenen Strömungsfeldes $u(x_S, y_S|t) = \hat{u} = \text{const}$ und $v(x_S, y_S|t) = \hat{v} \cos(kx_S)$ liefert:

$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{\hat{v} \cos(kx_S)}{\hat{u}} = \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \cos(kx_S)$$

Separation der Variablen und unbestimmte Integration führt mit $\hat{u}, \hat{v}, k = \text{const}$ zu:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int dy_S &= \int \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \cos(kx_S) dx_S + C \\ \Rightarrow y_S &= \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \int \cos(kx_S) dx_S + C \\ \Rightarrow y_S &= \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \frac{1}{k} \sin(kx_S) + C\end{aligned}$$

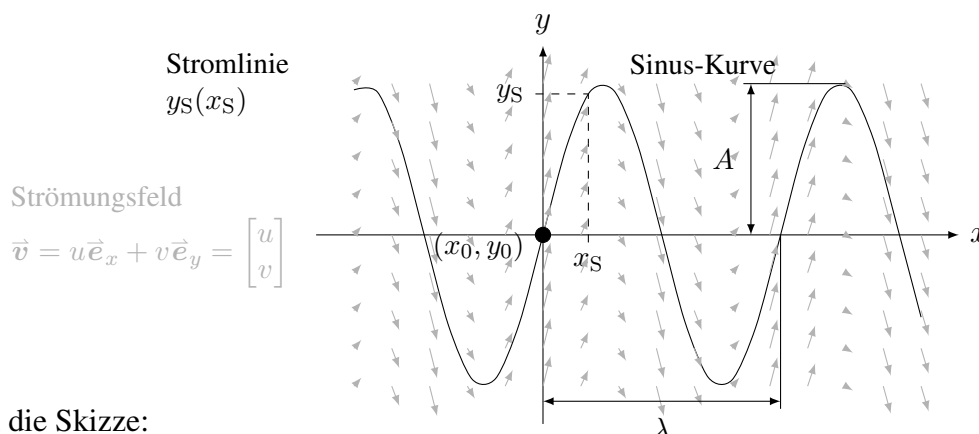
Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}y_S(x_S = x_0 = 0 | t = t_0 > 0) &\stackrel{!}{=} y_0 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\hat{v}}{\hat{u}k} \underbrace{\sin(kx_0)}_{=0} + C &= y_0 = 0 \\ &\Rightarrow C = 0\end{aligned}$$

Somit:

$$\Rightarrow y_S(x_S | t) = y_S(x_S) = \frac{\hat{v}}{\hat{u}k} \sin(kx_S)$$

Die Stromlinie $y_S(x_S)$ durch (x_0, y_0) beschreibt eine Sinus-Kurve in kartesischen Koordinaten, wie in der nachfolgenden Skizze gezeigt:



Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsen mit Beschriftungen
- Stromlinie als Sinus-Kurve mit Amplitude $A = \frac{\hat{v}}{\hat{u}k}$ und Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ passend zur Lösung skizziert
- Geschwindigkeitsvektorfeld tangential zur Stromlinie skizziert

e) Zur Herleitung der "Barometrischen Höhenformel" in der Fluidstatik bzw. aus der Fluidstatischen Grundgleichung werden folgende zentrale Annahmen getroffen.

- Als thermisches Stoffmodell für die Gasatmosphäre wird das ideale Gas gewählt:

$$p = \rho R_s T$$

- Die Atmosphäre wird als isotherm angenommen:

$$T = \text{const} > 0$$

- Als Randbedingung zur Lösung der sich ergebenden gewöhnlichen Differentialgleichung wird in der gegebenen Formel der Umgebungsdruck p_a auf der Höhe $z = 0$ verwendet:

$$p(z = 0) = p_a$$

- Die Gravitationsbeschleunigung ist höhenunabhängig konstant:

$$g = \text{const} > 0$$